МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ ИРКУТСКОЙ ОБЛАСТИ
Государственное бюджетное профессиональное образовательное учреждение
Иркутской области
«Ангарский промышленно – экономический техникум»
(ГБПОУ ИО «АПЭТ»)

Авторская педагогическая разработка
(комбинаторная)

Курс лекций

по учебной дисциплине Математика: алгебра и начала математического анализа; геометрия
для студентов дневного отделения всех специальностей
всех форм обучения

Автор разработки:
Майборская Светлана Владимировна,
преподаватель ГБПОУ ИО «АПЭТ»

г.Ангарск
2016 год

Одобрено

на заседании цикловой комиссии математических и естественнонаучных дисциплин

Рассмотрено и рекомендовано методическим советом к использованию в образовательном процессе

Автор – составитель:Майборская С.В., преподаватель высшей квалификационной категории ГБПОУ ИО «Ангарский промышленно – экономический техникум»

Аннотация: Курс лекций по разделу математики, геометрия предназначен для студентов, обучающихся по всем специальностям общеобразовательного цикла. Курс состоит 15 тем, в которых в доступной форме излагаются основы геометрии, нацелен на систематизацию и конкретизацию знаний, приобретенных в процессе изучения учебной дисциплины Математика, и содержит материал, достаточный для успешного прохождения студентами текущей и промежуточной аттестации.

Курс лекций подготовлен согласно тематике рабочей программы учебной дисциплины и включает широкий спектр вопросов для самоконтроля.

Рецензенты: Стогова Л.А., председатель цикловой комиссии математических и естественнонаучных дисциплин ГБПОУ ИО «АПЭТ», высшей квалификационной категории

СОДЕРЖАНИЕ

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА..... 4
Тема № 1. Введение 5
Тема № 2 Параллельность прямых и плоскостей 11
1.1 Параллельность прямых, прямой и плоскости 11
Тема № 3 Взаимное расположение прямых в пространстве. 14
Угол между двумя прямыми. 14
Скрещивающиеся прямые 14
Тема № 4 Параллельность плоскостей..... 18
Тема № 5 Перпендикуляр и наклонные. Угол между прямой и плоскостью . 20
Тема № 6 Перпендикулярные прямые в пространстве 23
Тема № 7 Двугранный угол. Перпендикулярность плоскостей 28
Тема № 8 Многогранники. Понятие многогранника. Призма..... 31
Тема № 9 Правильные многогранники 36
Тема № 10 Виды симметрий 42
Тема № 10 Тетраэдр и параллелепипед 46
Тетраэдр 46
Параллелепипед..... 47
Тема № 11 Задачи на построение сечений 50
Тема 12 Цилиндр 52
Тема 13 Метод координат в пространстве. Движения 56
Тема 14 Компланарные векторы..... 59
Тема 15 Скалярное произведение векторов 62

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Настоящий «Курс лекций по геометрии» написан в соответствии с действующими в настоящее время стандартами по дисциплине «Математика: алгебра и начала математического анализа; геометрия» и учебными программами, по которым обучаются студенты дневного отделения ГБПОУ ИО «Ангарский промышленно – экономический техникум». Главное существенное отличие настоящего «Курса лекций» состоит в том, что изложение материала ведется не в конспективном стиле, а с подробными словесными пояснениями. При этом рамки изложения расширены. Материал пособия разбит на лекции. После каждой лекции кратко подведены ее основные итоги и предлагаются вопросы для самоконтроля. Курс состоит из15 тем, в которых в доступной форме излагаются основы геометрии, нацелен на систематизацию и конкретизацию знаний, приобретенных в процессе изучения учебной дисциплины Математика

Пособие может быть использовано при изучении курса геометрии студентами ГБПОУ ИО «АПЭТ» всех специальностей всех форм обучения.

Объем и степень глубины излагаемого в пособии материала соответствуют всем специальностям общеобразовательного цикла, выделяемых основной образовательной программой среднего профессионального образования подготовки квалифицированных рабочих, служащих. В силу специфики преподавания дисциплины Математика за один год, количество часов по разделу Геометрия очень маленькое. Поэтому курс краток и включает в себя разнообразные виды работ, по которым студенты могут получить оценки. Это создание презентаций, решение кроссвордов, рисунки великих математиков, выполнение тестов и так далее.

Каждая тема заканчивается вопросами для проверки знаний обучающихся.

В отличие от существующих учебников по геометрии, настоящее пособие учитывает особенности рабочих программ специальностей ГБПОУ ИО «АПЭТ».

Тема № 1. Введение

1 Предмет стереометрии

Школьный курс геометрии состоит из двух частей: планиметрии и стереометрии. В планиметрии изучаются свойства геометрических фигур на плоскости. Стереометрия – это раздел геометрии, в котором изучаться фигур в пространстве. Слово «стереометрия» происходит о греческих слов «стереос» - объемный, пространственный и «метрео»- измерять.

Простейшими и, можно сказать, основными фигурами в пространстве являются точки, прямые и плоскости. Наряду с этими фигурами мы будем рассматривать геометрические тела и их поверхности. Представление о геометрических телах дают окружающие нас предметы. Так, например, кристаллы имеют форму геометрических тел, поверхности которых составлены из многоугольников. Такие поверхности называются многогранникам. Одним из простейших многогранников является куб (рис. 1, а). Капли жидкости в невесомости принимают форму геометрического тела, называемого шаром (рис. 1, б). Такую же форму имеет футбольный мяч. Консервная банка имеет форму геометрического тела, называемого цилиндром (рис. 1, е). В отличие от реальных предметов геометрические тела, как и всякие геометрические фигуры, являются воображаемыми объектами. Мы представляем геометрическое тело как часть пространства, отделенную от остальной части пространства поверхностью - границей этого тела. Так, например, граница шара есть сфера, а граница цилиндра состоит из двух кругов - оснований цилиндра н боковой поверхности.

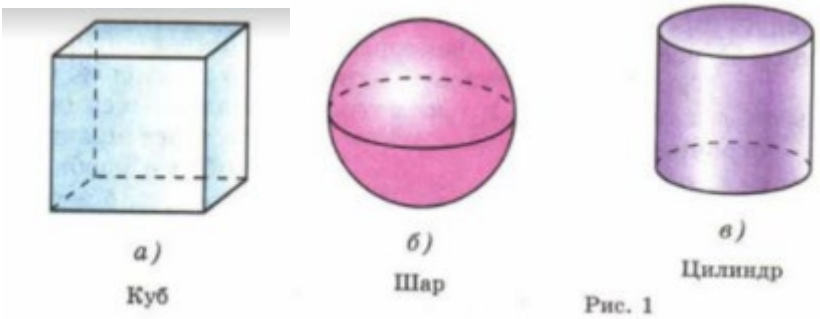


Рис. 1

Изучая свойства геометрических фигур воображаемых объектов, мы получаем представление о геометрических свойствах реальных предметов (их форме, взаимном расположении и т. д.) мы можем использовать эти свойства в практической деятельности. В этом состоит практическое (прикладное) значение геометрии. Геометрия, в частности стереометрия, широко

используется в строительном деле, архитектуре, машиностроении, геодезии, во многих других областях науки и техники.

При изучении пространственных фигур, в частности геометрических тел, пользуются их изображениями на чертеже. Как правило, изображением пространственной фигуры служит ее проекция на ту или иную плоскость. Одна п та же фигура допускает различные изображения. Обычно выбирается то из них, которое создает правильное представление о форме фигуры и наиболее удобно для исследования ее свойств. На рисунках 2, а, б изображены два многогранника - параллелепипед и пирамида, и на рисунке 2. в - конус. При этом невидимые части этих фигур изображены штриховыми линиями. Правила изображения пространственных фигур приведены в приложении 1. В течение двух лет мы будем изучать взаимное расположение прямых и плоскостей, многогранники, векторы и метод координат в пространстве: круглые, геометрические тела - цилиндр, конус, шар и рассмотрим вопрос об объемах тел.

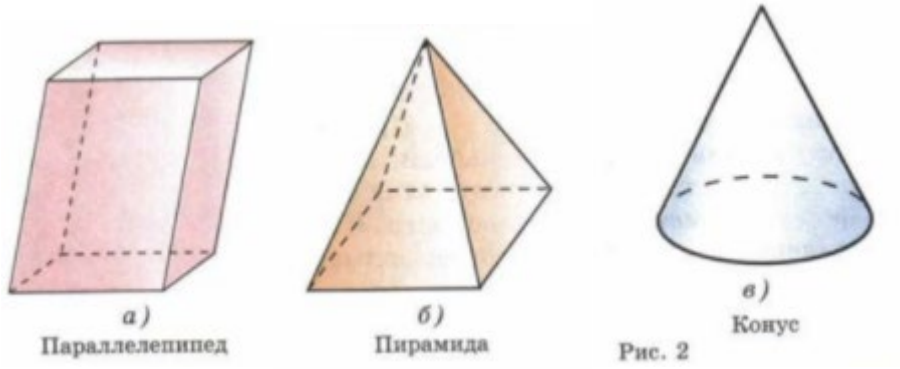


Рис. 2

2 Аксиомы стереометрии

В планиметрии основными фигурами были точки и прямые. В стереометрии наряду г ними рассматривается еще одна основная фигура - плоскость. Представление о плоскости дает гладкая поверхность стола или стены. Плоскость как геометрическую фигуру следует представлять себе простирающейся неограниченно во все стороны. Как н ранее, точки будем обозначать прописными латинскими буквами А, В, С и т. д., а прямые - строчными латинскими буквами а, b, с и т. д. или двумя прописными латинскими буквами АВ. СР и Т. д. Плоскости будем обозначать греческими букве- ми а. р, у и т. д. На рисунках плоскости изображаются в виде параллелограмма (рис. 3, а) или в виде произвольной области (рис. 3, б).

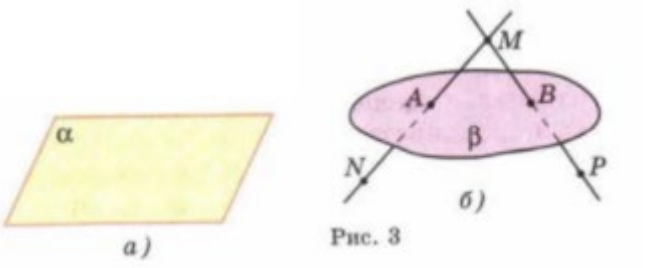


Рис. 3

Ясно, что в каждой плоскости лежат какие-то точки пространства, но не все точки пространства лежат в одной и той же плоскости. На рисунке 3, 6 точки А и В лежат в плоскости β (плоскость β проходит через эти точки), а точки M. N, P не лежат в этой плоскости. Коротко это записывают так: А € β, В€β, $M \notin \beta,\ N \notin \beta,\ P \notin \beta.$. Основные свойства точек, прямых и плоскостей, касающиеся их взаимного расположения, выражены в аксиомах. Вся система аксиом стереометрии состоит из ряда аксиом, большая часть которых нам знакома по курсу планиметрии. Полный список аксиомы некоторые следствия из них приведены в приложении 2. здесь мы сформулируем лишь три аксиомы о взаимном расположении точек, прямых н плоскостей в пространстве. Ниже они обозначены A_1,, A_2, A_3.

A_1, Через любые три точки, не лежащие на одной прямой, проходит плоскость, в притом только одна.

Иллюстрацией к этой аксиоме может служить модель, изображенная на рисунке 4. Плоскость, проходящую через точки А, В и С, не лежащие на одной прямой, иногда называют плоскостью АВС. Отметим, что если взять не три, а четыре произвольные точки, то через них может не проходить ни одно плоскость. Иначе говоря, четыре точки могут не лежать в одной плоскости. Каждый знаком с таким наглядным подтверждением этого факта: если ножки стула не одинаковые по длине, то стул стоит на трех ножках, т. е. опирается на три .точки., а конец четвертой ножки (четвертая «точка».) не лежит в плоскости пола, а висит в воздухе.

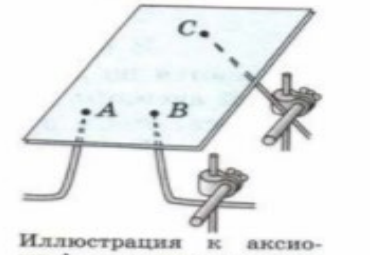
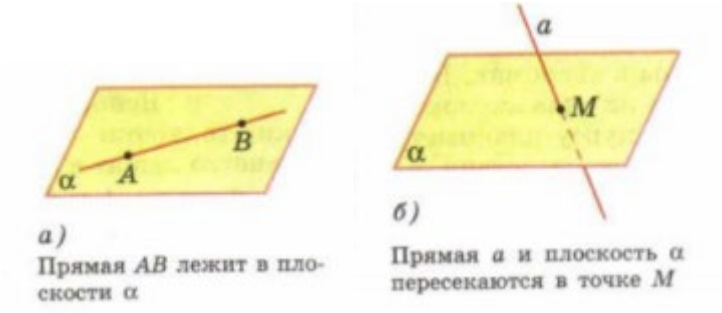


Иллюстрация к аксиоме A_1: пластинка поддерживается тремя точками *A*, *B* и *C*, не лежащими на одной прямой
Рис. 4

A_2

Если две точки прямой лежат в плоскости, то все точки прямой лежат в этой плоскости.

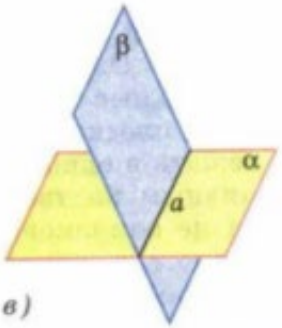
В таком случае говорят, что прямая лепит в плоскости или плоскость проходит через прямую (рис. 5, а). Свойство, выраженное в аксиоме А2, используется для проверки ровности чертежной линейки. С этой целью линейки прикладывают краем к плоской поверхности стола. Если край линейки ровный (прямолинейный), то он всеми своими точками прилегает к поверхности стола. Если край неровный, то в каких-то местах между ним н поверхностью стола образуется просвет. Из аксиомы А1 следует, что если прямая не лежит в данной плоскости, то она имеет с ней не более одной общей точки. Если прямая и плоскость имеют только одну общую точку, то говорят, что они пересекаются (рис. 5, б).



A_3

Если две плоскости имеют общую точку, то они имеют общую прямую, на которой лежат все общие точки этих плоскостей.

В таком случае говорят, что плоскости пересекаются по прямой (рис. 5, е). Наглядной иллюстрацией аксиомы А, является пересечение двух смежных стен, стены и потолка классной комнаты. Прежде чем перейти к первым следствиям из данных аксиом, отметим одно важное обстоятельство, которым будем пользоваться в дальнейшем. В пространстве существует бесконечно много плоскостей, и в каждой плоскости справедливы все аксиомы и теоремы планиметрии. Более того, признаки равенства и подобия треугольников, известные из курса планиметрии справедливы и для треугольников, расположенных в разных плоскостях (см. приложение 2).



в)

Плоскости α и β пересекаются по прямой *a*

Рис. 5

3 Некоторые следствия из аксиом;

Теорема

Через прямую и не лежащую на ней точку проходит плоскость, и притом только одна.

Доказательство

Рассмотрим прямую а и не лежащую на ней точку М (рис. 6). Докажем, что через прямую и ы точку М проходит плоскость. Отметим на прямой а две точки Р и Q. Точки М. Р н Q не лежат на одной пря-мой, поэтому согласно аксиоме А, через эти точки про-ходит некоторая плоскость а. Так как две точки пря-мой а (Р и Q) лежат в плоскости а, то по аксиоме А, плоскость а проходит через прямую а. Единственность плоскости, проходящей че-рез прямую а и точку М, следует из того, что любая плоскость, проходящая через прямую а и точку М, проходит через точки М. Р и Q. Следовательно, эта плоскость совпадает с плоскостью а, так как по аксиоме А, через точки М. Р х Q проходит только одна плоскость. Теорема доказана.

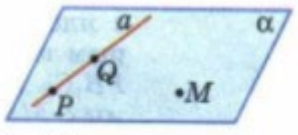


Рис. 6

Теорема

Через две пересекающиеся прямые проходит плоскость, и притом только одна.

Доказательство

Рассмотрим прямые а н h, пересекающиеся в точке М (рис. 7), и докажем, что через эти прямые проходит плоскость, и притом только одна. Отметим на прямой Ь какую-нибудь точку N, отличную от точки М, и рассмотрим плоскость и, проходящую через точку N и прямую а. Так как две точки прямой h лежат в плоскости и, то по аксиоме А, плоскость а проходит через прямую Ь. Итак, плоскость а проходит через прямые а и Ь. Единственность такой плоскости следует из того, что любая плоскость, проходящая через прямые а и Ь, про-ходит через точку N. Следовательно, она совпадает с плоскостью и, поскольку через точку N н прямую а проходит только одна плоскость. Теорема доказана.

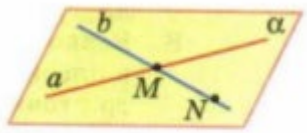


Рис. 7

Вопросы для самоконтроля:

1) Верно ли что: а) любые три точки лежит в одной плоскости; б) любые четыре точки лежат в одной плоскости; в) любые четыре точки не лежат в одной плоскости; г) через любые три точки проходит плоскость, и при. ТОМ только ОДНА?

2) Две смежные вершины и точка пересечения диагоналей параллелограмма лежат в плоскости α. Лежат ли две другие вершины параллелограммы в плоскости α? Ответ обоснуйте

3) Верно ли, что прямая лежит в плоскости данного треугольника если она: а) пересекает две стороны треугольника; б) проходит через одну из вершин треугольника?

Тема № 2 Параллельность прямых и плоскостей
1.1 Параллельность прямых, прямой и плоскости

Параллельные прямые в пространстве

Определение

Две прямые в пространстве называются параллельными, если они лежат в одной плоскости и не пересекаются.

Теорема

Через любую точку пространства, не лежащую на данной прямой, проходит прямая, параллельная данной, и притом только одна.

Доказательство

Рассмотрим прямую а и точку М, не лежащую на этой примой (рис 1)Через прямую а и точку М проходит плоскость, и притом только одна. Обозначим эту плоскость буквой а.Прямая проходящая через точку М параллельно прямой а, должна лежать в одной плоскости с точкой М и прямой а, т.е. должна лежать на плоскости а.Но в плоскости а, как известно из курса планиметрии, через точку М проходит прямая, параллельная прямой а, и притом только одна. На рисунке 2 эта прямая обозначена буквой b. Итак, b – единственная прямая, проходящая через точку М параллельно прямой а.Теорема доказана.

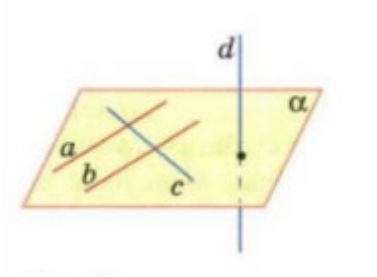


Рисунок 1

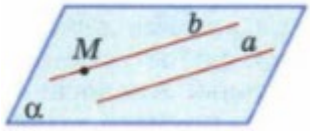


Рисунок 2

В дальнейшем нам понадобятся также понятия параллельных отрезков, параллельных лучей. Два отрезка называются параллельными, если они лежат на параллельных прямых. Аналогично определяется параллельность двух лучей.

Параллельность трех прямых.

Докажем лемму о пересечении плоскости параллельными прямыми, необходимую для дальнейшего изложения.

Лемма

Если одна из двух параллельных прямых пересекает данную плоскость, то и другая прямая пересекает эту плоскость.

Доказательство

Рассмотрим параллельные прямые a и b, одна из которых – прямая a-пересекает плоскость a в точке M (рисунок 3)Докажем, что прямая b также пересекает плоскость a, т.е. имеет с ней только одну общую точку.

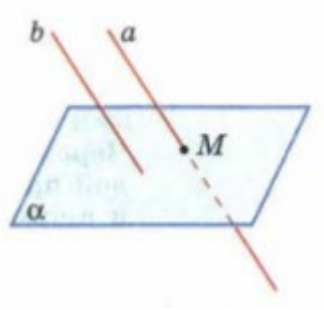


Рисунок 3

Обозначим буквой B плоскость, в которой лежат параллельные прямые a и b.Так как две различные плоскости a и B имеют общую точку M, то по аксиоме A_3 они пересекаются по некоторой прямой (рисунок 4).Эта прямая лежит на плоскости B и пересекает прямую a в точке M, поэтому она пересекает параллельную ей прямую b в некоторой точке N.Прямая p лежит также в плоскости a, поэтому N- точка плоскости a.Следовательно, N – общая точка прямой b и плоскости a.

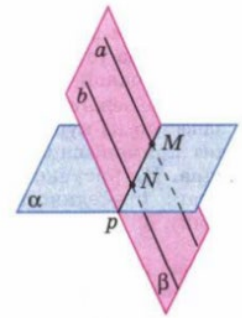


Рисунок 4

Теорема

Если две прямые параллельны третьей прямой, то они параллельны.

Доказательство

Пусть a ∥ b и b ∥ c. Докажем, что a ∥ b.Для этого нужно доказать, что прямая a и b: 1) лежат в одной плоскости и 2) не пересекаются.

1) Отменим какую-нибудь точку K на прямой b и обозначим буквой a плоскость, проходящую через прямую a и точку K(рис.5).

Докажем, что прямая b лежит на этой плоскости. Действительно, если допустить, что прямая b пересекает плоскость a, то по лемме о пересечения плоскости параллельными прямыми прямая c также пересекает плоскость a. Но так как прямые a и c параллельны, то и прямая a пересекает плоскость α, что невозможно, ибо прямая a лежит в плоскости α.

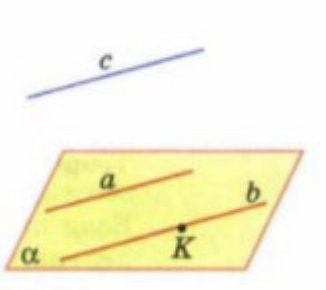


Рисунок 5

2) Прямые a и b не пересекаются, так как в противном случае через точку их пересечения проходили бы две прямые (a и b), параллельные прямой c, что невозможно. Теорема доказана.

Тема № 3 Взаимное расположение прямых в пространстве.
Угол между двумя прямыми.
Скрещивающиеся прямые

Если две прямые пересекаются или параллельны, то они лежат в одной плоскости. Однако в пространстве две прямые могут быть расположены так, что они не лежат в одной плоскости, т.е. не существует такой плоскости, которая проходит через обе эти прямые. Ясно, что такие прямые не пересекаются и не параллельны.

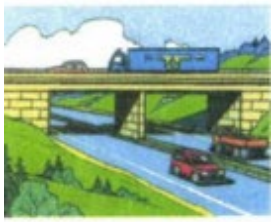


Рис. 19

Определение

Две прямые называются скрещивающимися, если они не лежат в одной плоскости.

Наглядное представление о скрещивающихся прямых дают две дороги, одна из которых проходит по эстакаде, а другая – под эстакадой (рис. 19).

Докажем теорему, которая выражает признак скрещивающихся прямых.

Теорема

Если одна из двух прямых лежит в некоторой плоскости, а другая прямая пересекает эту плоскость в точке, не лежащей на первой прямой, то эти прямые скрещивающиеся.

Доказательство

Рассмотрим прямую AB, лежащую в плоскости α, и прямую CD, пересекающую эту плоскость в точке C, не лежащей на прямой AB (рис. 20). Докажем, что AB и CD – скрещивающиеся прямые, т.е. они не лежат в одной плоскости. Действительно, если допустить, что прямые AB и CD лежат в некоторой плоскости β, то плоскость β будет проходить через прямую AB и точку C и поэтому сов падает с плоскостью α. Но это невозможно, так как прямая CD не лежит в плоскости α. Теорема доказана.

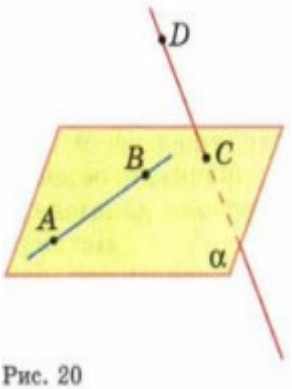
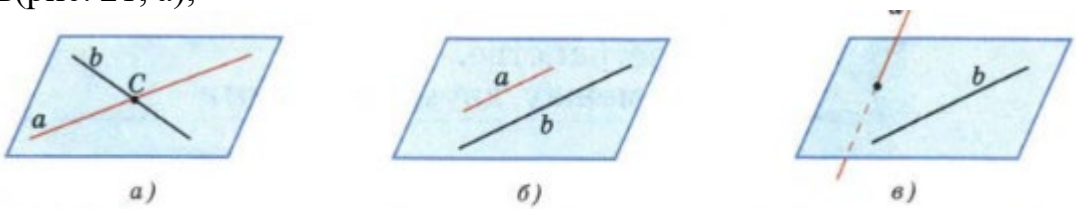


Рис. 20

Итак, возможны три случая взаимного расположения двух прямых в пространстве:

а) прямые пересекаются, т.е. имеют только одну общую точку ть(рис. 21, а);



а) Пересекающиеся прямые

б) Параллельные прямые

в) Скрещивающиеся прямые

Рис. 21

б) прямые параллельны, т.е. лежат в одной плоскости и не пересекаются (рис. 21,б);

в) прямые скрещиваются, т.е. не лежат в одной плоскости (рис. 21, в).

Докажем ещё одну теорему о скрещивающихся прямых

Теорема

Через каждую из двух скрещивающихся прямых проходит плоскость, параллельная другой прямой.и притом только одна.

Доказательство

Рассмотрим скрещивающиеся прямые АВ и CD (рис. 22). Докажем, что через прямую АВ проходит плоскость, параллельная прямой CD, и такая плоскость только одна.

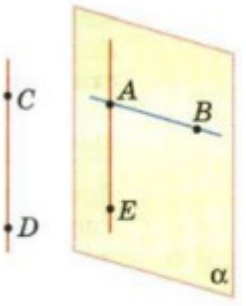


Рис. 22

Проведем через точку А прямую АЕ, параллельную прямой CD, и обозначим буквой а плоскость, проходящую через прямые АВ н АЕ. Так как пря-мая CD не лежит в плоскости а н параллельна пря-мой АЕ, лежащей в этой плоскости, то прямая CD параллельна плоскости а.

Ясно, что плоскость а - единственная плоскость, проходящая через прямую АВ и параллельная прямой CD. В самом деле, любая другая плоскость, проходящая через прямую АВ, пересекается с прямой АЕ, а значит, пересекается н с параллельной ей прямой СО.

Теорема доказана.

Наглядной иллюстрацией этой теоремы служат две дороги, одна из которых проходит по эстакаде, а другая - под эстакадой (см. рис. 19). Нижняя дорога лежит в плоскости земли, параллельной дороге на эстакаде. Ясно, что и через дорогу на эстакаде проходит плоскость, параллельная плоскости земли, а значит, параллельная нижней дороге.

Углы с сонаправленными сторонами

Согласно одной из аксиом (см. приложение 2) любая прямая а, лежащая в плоскости, разделяет эту плоскость на две части, называемые полуплоскостями (рис. 23). Прямая а называется границей каждой из этих полуплоскостей. Любые две точки одной и той же полуплоскостей лежат по одну сторону от прямой а, а любые две точки разных полуплоскостей - по разные стороны от этой прямой (см. рис. 23).

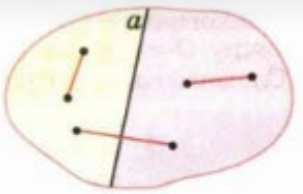


Рис. 23

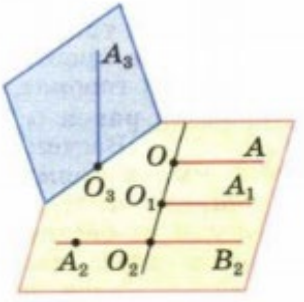


Рис. 24

Два луча ОА и O_1A_1,. не лежащие на одной прямой, называются **сонаправленными**, если они параллельны и лежат в одной полуплоскости с границей 001. Лучи ОА н 01А1, лежащие на одной прямой, называются сонаправленными, если они совпадают или один из них содержит другой. На рисунке 24 лучи ОА н O_1A_1, а также лучи АД и 02В2 сонаправлены, а лучи ОА х 0_2A_2, ОА и 0_3A_3, 0_2A_2 и 0_2B_2 не являются сонаправленными (объясните почему). Докажем теорему об углах с сонаправленными сторонами.

Теорема

Если стороны двух углов соответственно сонаправленными, то такие углы равны.

Доказательство

Ограничимся рассмотрением случая, когда углы О и O_1, с соответственно сонаправленными сторонами лежат в разных плоскостях, и докажем, что $CO = C_1O_1$.

Отметим на сторонах угле О какие-нибудь точки А н В н отложим на соответственных сторонах угле О, отрезки $0_1A_1 = OA$ и $0_1B_1 = OB$ (рис. 25). Так как лучи ОА н 0,А, сонаправлены а $OA = 0_1A_1$ то получится параллелограмм ОАА,О, и, следовательно, АА,|00| и $AA_1 = 00_1$. Аналогично получаем: BB_1 и 00_1 н $BB_1 = 00_1$. Отсюда следует, что $AA_1||BB_1$ и $AA_1 = BB1$ в, значит, АВВ, А, - параллелограмм н $AB = A_1B_1$. Сравняю теперь треугольники АОВ н А,О,В,. Они равны по трем сторонам, и поэтому L0 = L0,.

Теорема доказана.

Замечание

При доказательстве мы неявно воспользовались тем, что отрезки АВ и A_1B_1 не пересекаются (в противном случае параллелограммом оказалась 6ы фигура AB_1BA_1 а не ABB_1A_1). Докажем это. Допустим, что отрезки АВ н А, В, пересекаются. Тогда плоскости АОВ и А 0,В, пересекаются по некоторой прямой а. Поскольку ОА|| О1А1 то ОА||А1О1В1 поэтому а || ОА (см. П.6).

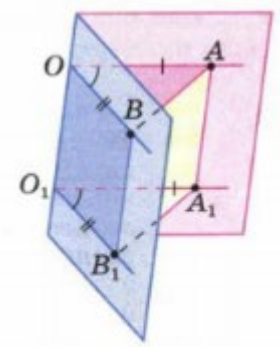


Рис. 25

Аналогично а || ОВ. Но этого не может быть, так как через точку О проходит одна прямая, параллельная прямой а. Следовательно, отрезки АВ и A_1B_1 не пересекаются.

Угол между прямыми

Любые две пересекающиеся прямые лежат в одной плоскости и образуют четыре неразвернутых угла. Если известен один из этих углов, то можно найти и другие три угла (рис. 2б). Пусть а — тот из углов, который не превосходит любого из трех остальных углов. Тогда говорят, что угол между пересекающимися прямыми равен а. Очевидно, 0° < а б 90`.

Введем теперь понятие угла между скрещивающимися прямыми. Пусть АВ н CD — две скрещивающиеся прямые (рис. 27, а). Через произвольную точку М, проведем прямые А, В, соответственно параллельные прямым АВ и

CD (рис. 27, 6) Если угол между прямыми A_1B_1 и C_1D_1) равен J, то будем говорить, что угол между скрещивающимися прямыми AB и CD равен ф.

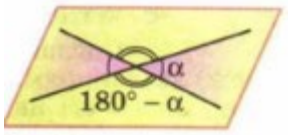
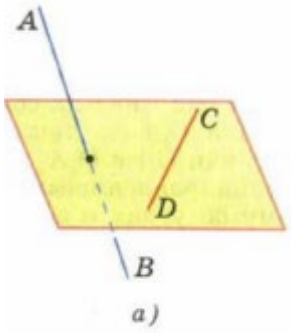


Рис. 26

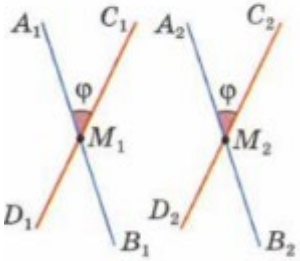
Докажем, что угол между скрещивающимися прямыми не зависит от выбора точки M, действительно, возьмем любую другую точку M2 ы проведем через нее прямые A2 B2 и C ф2, соответственно параллельные пряным AB и CB (см. рис. 27. Б. В качестве точки M, можно взять любую точку ха одной из скрещивающихся прямых. На рисунке 27,а на прямой CB отмечена точка M и через нее проведена прямая A'B', параллельная AB. Угол между прямыми A'B' и CB также равен ф.



а)

Задачи

1) Точка D не лежит в плоскости треугольника ABC, точки M. N и P — середины отрезков BA, OB и BC соответственно, точка K лежит па отрезке BN. Выясните взаимное расположение прямых: а) ND и AB; б) PK и BC; в) MN и AB; г) MP и AC; д) KN и AC; е) MD и BC.

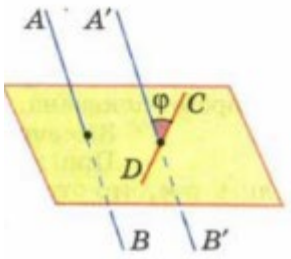


б)

2) Прямая c пересекает прямую a и не пересекает прямую b, параллельную прямой a. Докажите, что b и c - скрещивающиеся прямые.

3) Прямая m пересекает сторону AB треугольника ABC. Каково взаимное расположение прямых m и BC, если:

а) прямая т лежит в плоскости ABC и не имеет общих точек с отрезком AC; 6) прямая т не лежит в плоскости ABC?



в)

Тема № 4 Параллельность плоскостей

Параллельные плоскости.

Мы знаем, что если две плоскости имеют общую точку, то они пересекаются по прямой (аксиома A_3). Отсюда следует, что **две плоскости либо пересекаются по прямой** (рис. 1, а), **либо не пересекаются, т. е. не имеют ни одной общей точки** (рис. 1, б).

Определение

Две плоскости называются **параллельными**, если они не пересекаются.

Представление о параллельных плоскостях дают пол и потолок комнаты, две противоположные стены, поверхность стола и плоскость пола.

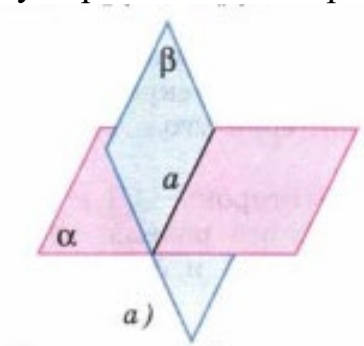
Параллельность плоскостей α и β обозначается так: α || β. Рассмотрим признак параллельности двух плоскостей.

Теорема

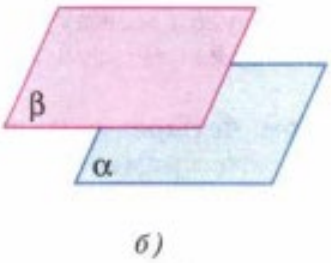
Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны.

Доказательство

Рассмотрим две плоскости α и β (рис. 29). В плоскости α лежат пересекающиеся в точке M прямые a и b, а в плоскости β - прямые a_1 и b_1, причем a || a_1 и b || b_1. Докажем, что α || β. Прежде всего отметим, что по признаку параллельности прямой и плоскости a || β и b || β.



Плоскости α и β пересекаются



Плоскости α и β параллельны

Рис.1

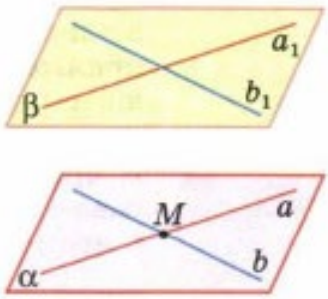


Рис.2

Допустим, что плоскости α и β не параллельны. Тогда они пересекаются по некоторой прямой c. Мы получили, что плоскость α проходит через прямую α, параллельную плоскости β, и пересекает плоскость β по прямой c. Отсюда следует, что прямые a и c параллельны.

Но плоскость α проходит также через прямую b, параллельную плоскости β. Поэтому b || c. Таким образом, через точку M проходят две прямые a и b, параллельные прямой c. Но это невозможно, так как по теореме о параллельных прямых через точку M проходит только одна прямая, параллельная прямой c. Значит, наше допущение неверно и, следовательно,

α || β. Теорема доказана.

1. Свойства параллельных плоскостей

Рассмотрим два свойства параллельных плоскостей.

1°. Если две параллельные плоскости пересечены третьей, то линии их пересечения параллельны.

Наглядным подтверждением этого факта служат линии пересечения пола и потолка со стеной комнаты - эти линии параллельны.

Для доказательства данного свойства рассмотрим прямые a и b, по которым параллельные плоскости α и β пересекаются с плоскостью у (рис. 3). Докажем, что прямые a и b параллельны. Эти прямые лежат в одной плоскости (в плоскости у) и не пересекаются. В самом деле, если бы прямые a и b пересекались, то плоскости α и β имели бы общую точку, что невозможно, так как эти плоскости параллельны.

Итак, прямые a и b лежат в одной плоскости и не пересекаются, т. е. прямые a и b параллельны.

2°. Отрезки параллельных прямых, заключенные между параллельными плоскостями, равны.

Для доказательства этого свойства рассмотрим отрезки AB и CD двух параллельных прямых, заключенные между параллельными плоскостями α и β (рис. 4). Докажем, что AB = CD. Плоскость у, проходящая через параллельные прямые AB и CD, пересекается с плоскостями a и B по параллельным прямым AC и BD (свойство 1°). Таким образом, в четырехугольнике ABDC противоположные стороны попарно параллельны, т. е. ABDC - параллелограмм. Но в параллелограмме противоположные стороны равны, поэтому отрезки AB и CD равны.

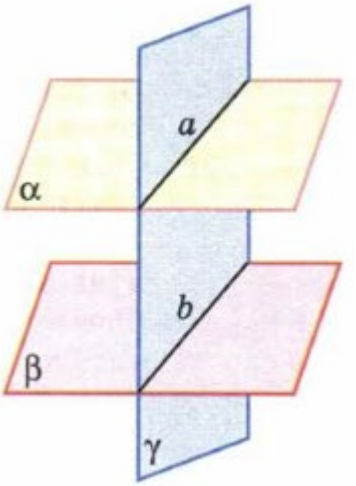


Рис.3

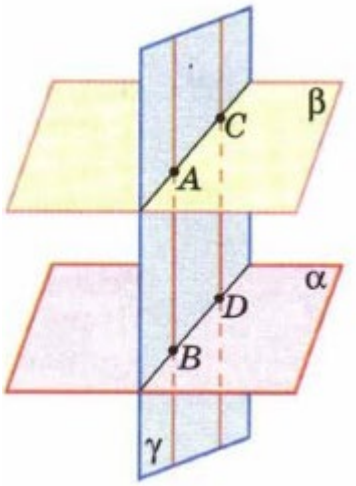


Рис.4

Тема № 5 Перпендикуляр и наклонные. Угол между прямой и плоскостью

Расстояние от точки до плоскости

Рассмотрим плоскость а и точку А, не лежащую в этой плоскости. Проведем через точку А прямую, перпендикулярную к плоскости а, и обозначим буквой Н току пересечения этой прямой с плоскостью α (рис. 51).

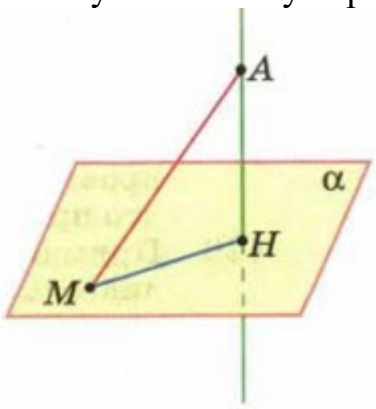


Рис. 51

Отрезок АН называется **перпендикуляром, проведенным из точки А к плоскости** а, а точка Н – **основанием перпендикуляра**. Отметим в плоскости α какую-нибудь точку М, отличную от Н, и проведем отрезок АМ. Он называется **наклонной**, **проведенной из точки** А к плоскости α, а точка М – **основанием наклонной**. Отрезок НМ называется **проекцией наклонной на плоскость** α. Сравним перпендикуляр АН и наклонную АМ: в прямоугольном треугольнике АМН сторона АН – катет, а сторона АМ- гипотенуза, поэтому АН < АМ. Итак, **перпендикуляр, проведенный из данной точки к плоскости, меньше любой наклонной, проведенной из той же точки к этой плоскости.**

Следовательно, из всех расстояний от точки А до различных точек плоскости а наименьшим является расстояние до точки Н. Это расстояние, т.е. длина перпендикуляра, проведенного из точки А к плоскости α, называется **расстоянием от точки А до плоскости** α. Когда мы говорим, что некоторой предмет, например, лампочка уличного фонаря, находится на такой-то высоте, скажем 6 м. от земли, то имеем в виду, что расстояние от лампочки до поверхности земли измеряется по перпендикуляру, проведенному от лампочки к плоскости земли (рис. 52).

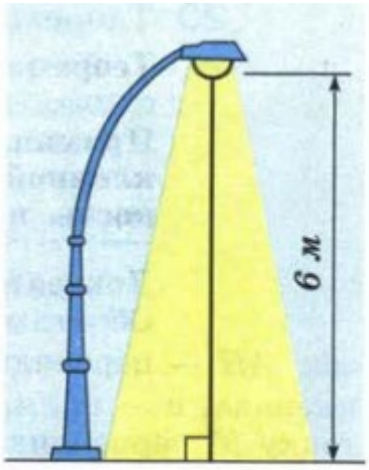


Рис. 52

Замечания

1. Если две плоскости параллельны, то все точки одной плоскости равноудалены от другой плоскости. В самом деле, рассмотрим перпендикуляры АА и ММ, проведенные из двух произвольных точек А и М плоскости α к параллельной ей плоскости В. Так как АА⊥β и ММ ⊥ β, то АА ∥ ММ. Отсюда следует, что ММ = АА (свойство 2, п.11), т.е. расстояние от любой точки М плоскости α до плоскости β равно длине отрезка АА. Очевидно, все точки плоскости β находятся на таком же расстоянии от плоскости α.

Расстояние от произвольной точки одной из параллельных плоскостей до другой плоскости называется **расстоянием между параллельными плоскостями**.

Как уже отмечалось, примером параллельных плоскостей служат плоскости пола и потолка комнаты. Все точки потолка находятся на одинаковом расстоянии от пола. Это расстояние и есть высота комнаты.

2. Если прямая параллельна плоскости, то все точки прямой равноудалены от этой плоскости. В этом случае расстояние от произвольной точки прямой до плоскости называется **расстоянием между прямой и параллельной ей плоскостью.**

3. Если две прямые скрещивающиеся, то, как было доказано в п. 7, через каждую из них проходит плоскость, параллельная другой прямой, и притом только одна. Расстояние между одной из скрещивающихся прямых и плоскостью, проходящей через другую прямую параллельно первой, называется **расстоянием между скрещивающимися прямыми**.

Теорема о трех перпендикулярах

Теорема

Прямая, проведенная в плоскости через основание наклонной перпендикулярно к ее проекции на эту плоскость, перпендикулярна и к самой наклонной.

Доказательство

Обратимся к рисунку 53,

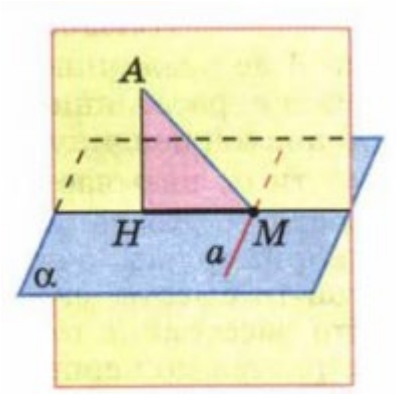


Рис. 53

на котором отрезок АН – перпендикуляр к плоскости а, АМ – наклонная, а прямая, проведенная в плоскости α через точку М перпендикулярно к проекции НМ наклонной. Докажем, что а ⊥ АМ.

Рассмотрим плоскость АМН. Прямая а перпендикулярна к этой плоскости, так как она перпендикулярна к двум пересекающимся прямым АН и МН, лежащим в плоскости, так как она перпендикулярна к двум пересекающимся прямым АН и МН, лежащим в плоскости АМН(а ⊥ НМ по условию и а ⊥ АН, так как АН ⊥ α). Отсюда следует, что прямая а перпендикулярна к любой прямой, лежащей в плоскости АМН, в частности а ⊥ АМ. Теорема доказана.

Эта теорема называется **теоремой о трех перпендикулярах**, так как в ней говорится о связи между тремя перпендикулярами АН, НМ, и АМ.

Справедлива также **обратная теорема: прямая, проведенная в плоскости через основание наклонной перпендикулярно к ней, перпендикулярна и к ее проекции**. По аналогии с доказательством прямой теоремы, используя рисунок 53, докажите эту теорему самостоятельно.

Тема № 6 Перпендикулярные прямые в пространстве

Две прямые в пространстве называются перпендикулярными (взаимно перпендикулярными) если угол между ними равен 90. Перпендикулярность прямых a и b обозначается a ⊥ b. Перпендикулярные прямые могут пересекаться и могут быть скрещёнными. На рисунке 43 перпендикулярные прямые a и b пересекаются, а перпендикулярные прямые a и c скрещивающиеся. Докажем лемму о перпендикулярности двух параллельных прямых к третьей прямой

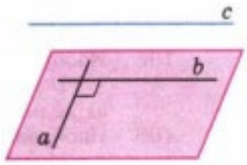


Рис. 43

Лемма

Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярная к третье прямой, то и другая прямая перпендикулярна этой прямой

Доказательство

Пусть a || b и a ⊥ c. Через произвольную точку M пространства, не лежащую на данных прямых, проведет прямые MA и MC, параллельны соответственно прямым a и c (рис 44). Так как a ⊥ c, то < AMC = 90.

По условию b||a a по построение a||MA, поэтому b||MA. И так прямые b и C параллельны соответственно прямым MA и M, угол между которыми равен 90. Это означает что угол между прямыми b и c так же равен 90, т.е b ⊥ c Лемма доказана

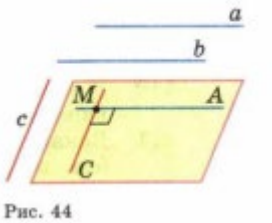


Рис. 44

Параллельные прямые, перпендикулярные к плоскости

Прямая называется перпендикулярной к плоскости если она перпендикулярна прямой лежащей на этой плоскости

Перпендикулярность прямой a и плоскости α обозначается так a⊥α говорят так же что плоскость α перпендикулярная к прямой a.

Если прямая a перпендикулярная к плоскости α то она пересекает эту плоскость. В самом деле, если прямая a не пересекала бы плоскость α, то она или лежала бы в этой плоскости, или была параллельна ей. Но тогда в плоскости α имелись бы прямые, не перпендикулярные ей, что противоречит определению перпендикулярности прямой и плоскости. Значит прямая a пересекает плоскость α.

На рисунке 45 изображена прямая a, перпендикулярная плоскости α

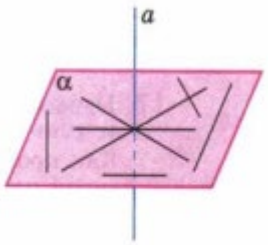


Рис. 45

Окружающая нас обстановка дает много примеров, иллюстрирующих перпендикулярность прямой и плоскости. Не покосившийся телеграфный столб стоит прямо, т.е перпендикулярно плоскости земли. Так же расположены колонны здания в отношении плоскости фундамента, линии пересечения стен в отношении к плоскости пола и т.д

Докажем две теоремы в которых устанавливается связь между параллельностью прямых и их перпендикулярностью плоскости.

Теорема

Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна плоскости то и другая прямая перпендикулярная к этой плоскости

Доказательство

Рассмотрим две параллельные прямые a и a1 и плоскость α, такую что a⊥α докажем что и a1⊥α. Приведем какую ни будь прямую X в плоскости α(рис 46). Так как a⊥α то a⊥x. По лемме о перпендикулярности двух параллельных прямых к третье a1⊥x. Таким образом, прямая a1 перпендикулярная к любой прямой, лежащей в плоскости a, т.е a1⊥α Теорема доказана

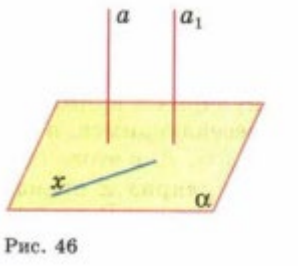


Рис. 46

Теорема

Если две прямые перпендикулярные к плоскости то они параллельны

Доказательство

Рассмотрим прямые a и b, перпендикулярные к плоскости α(рис 47) докажем что a||b. Через какую ни будь точку M прямой b проведем прямую b1 параллельную прямой a. По предыдущей теореме b1⊥α. Докажем что прямая b1 совпадает с прямой b. Тем самым будет доказано что a||b. Допустим что прямые b и b1 через точку M проходят две прямые перпендикулярные к прямой c по которой пересекаются плоскости α и β(рис 47 б). Но это не возможно следовательно a || b. Доказано

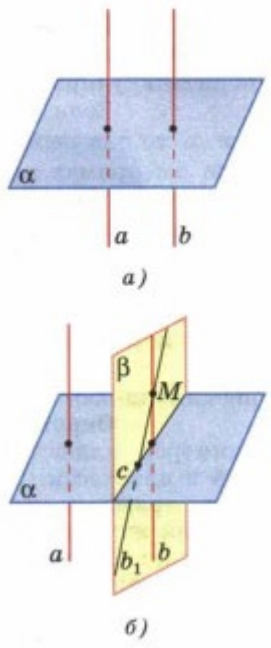


Рис. 47

Признаки перпендикулярности прямой и плоскости

Как проверить, перпендикулярная ли данная прямая к данной плоскости? Этот вопрос имеет практическое значение например при установке матч колонн зданий и т.д которые нужно поставить прямо т.е перпендикулярной той плоскости на которую нужно поставить. Оказывается для этого нет надобности проверять перпендикулярность по отношению к любой прямой как о том говорится в определении а достаточно проверить перпендикулярность к двум пересекающимся прямым лежащим в плоскости. Это вытекает из следующей теоремы, выражающей признак перпендикулярность прямой и плоскости

Теорема

Если прямая перпендикулярная к двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярная к этой плоскости

Доказательство

Рассмотрим прямую a, которая перпендикулярна к прямым p и q, лежащим в плоскости a x пресекающимся в точке O (рис. 48, а). Докажем. что a ⊥a. Для этого нужно доказать, что прямая a перпендикулярна к произвольной прямой m плоскости a.

Рассмотрим сначала случай, когда прямая a проходит через точку O (рис. 48, б). Проведем через точку O прямую 1, параллельную прямой т (если прямая т проходит через точку O, то в качестве 1 возьмем саму прямую т). Отметим на прямой a точки A и B так, чтобы точка O была серединой отрезка AB, и проведем в плоскости a прямую, пересекающую прямые p, q x j соответственно в точках P, Q и L. Будем считать для определенности, что точка Q лежит между точками P и L (рис. 48, б).

Так как прямые p и q - серединные перпендикуляры к отрезку AB, то AP = BP п AQ = BQ. Следовательно, ▲ APQ = ▲APQ по трем сторонам. Поэтому < APQ = < BPQ.

Сравним треугольники APL и BPL. Они равны по двум сторонам и углу между ними (AP = BP, PL - общая сторона, < APL = < BPL), поэтому AL = BL. Но это означает, что треугольник ABL равнобедренный н его медиана LO является высотой, т. е. L⊥a. Так как j||m J⊥a то m⊥a (по лемме о перпендикулярности двух параллельных прямых к третьей). Итак, прямая а перпендикулярна к любой прямой т плоскости а, т. е. а ⊥ а.

Рассмотрим теперь случай, когда прямая а не проходит через точку О. Проведем через точку О прямую а1 параллельную прямой а. По упомянутой лемме а1 ⊥ р и а1 ⊥ q, поэтому до доказанному в первого случае а1 ⊥ а. Отсюда (по первой теореме п. 16) следует, что а 1 а. Теорема доказана.

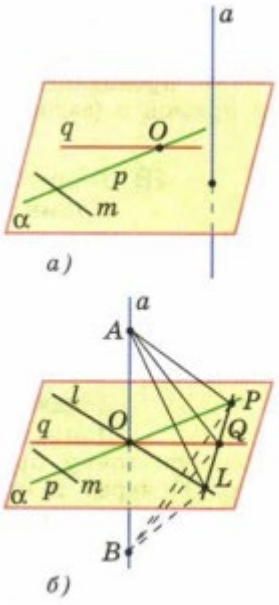


Рис. 48

Воспользуемся признаком перпендикулярности прямой и плоскости для решения следующей задача.

Задача

Доказать, что через любую точку пространства проходит плоскость, перпендикулярная к данной прямой.

Решение Обозначим данную прямую буквой а, а произвольную точку пространства - буквой М. Докажем, что существует плоскость, проходящая через точку М н перпендикулярная к прямой а. Проведем через прямую а две плоскости а н (3 так, чтобы М е а (рис. 49). В плоскости α через точку М проведем прямую Р. перпендикулярную к прямой а, а в плоскости β через точку пересечения прямых р и а проведем прямую q, перпендикулярную к прямой а. Рассмотрим плоскость у, проходящую через прямые р и q плоскость Y является искомой, так как прямая а перпендикулярная к двум пересекающимся прямым р и q этой плоскости.

Теорема о прямой, перпендикулярной плоскости

Теорема

Через любую точку пространства проходит прямая, перпендикулярная к данной плоскости, и притом только одна.

Доказательство

Данную плоскость обозначим а, а произвольную точку пространства — буквой М. Докажем, что: 1) через точку М проходит прямая, перпендикулярная к плоскости α; 2) такая прямая только одна.

1) Проведем в плоскости α произвольную прямую а и рассмотрим плоскость β проходящую через точку М и перпендикулярную к прямой а (рис. 50). Обозначим буквой b прямую, по которой пересекаются плоскости α и β плоскости через точку М проведем прямую с, перпендикулярную к прямой Ь. Прямая с и есть искомая прямая. В самою деле, она перпендикулярна к плоскости а, так как перпендикулярна к двум ряс. 50 пересекающимся прямым этой плоскости (с⊥b по построению и с⊥a, так как (β⊥a).

2) Предположим, что через точку М проходит еще одна прямая (обозначим ее через с1), перпендикулярная к плоскости α. Тогда (по обратной теореме п. 1б) с1||с, что невозможно, так как прямые с1 и с пересекаются в точке М. Таким образом, через точку М проходит только одна прямая, перпендикулярная к плоскости α. Теорема доказана.

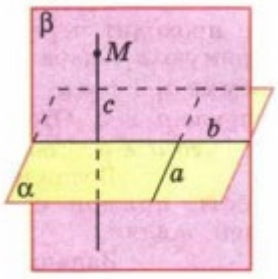


Рис. 50

1. Дан параллелепипед ABCDA1B1C1D1. Докажите, что:

а) DC⊥B1C1 И AB⊥A1D1, если <BAD = 90

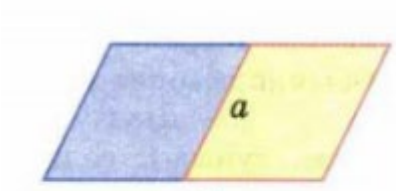
б) AB⊥CC1 И DD1⊥A1B1 если AB ⊥ DD1

2. В тетраэдре ABCD DC⊥AD докажите что AD⊥MN где M и N – Середины ребер AB и AC

3. Через точки P н Q прямой P проведены прямые, перпендикулярные к плоскости а и пересекающие ее соответственно в точках P1

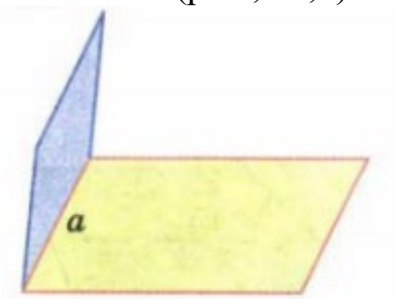
Тема № 7 Двугранный угол. Перпендикулярность плоскостей
Двугранный угол

Углом на плоскости мы называем фигуру, образованную двумя лучами, исходящими из одной точки. В стереометрии наряду с такими углами рассматривается еще один вид углов – **двугранный** углы. Чтобы ввести понятие двугранного угла, напомним, что любая прямая, Проведенная в данной плоскости, разделяет эту плоскость на две полуплоскости (рис .58,а) .Представим себе, что мы перегнули плоскость по прямой **а** так, что две полуплоскости с границей **а** оказались уже не лежащими в одной плоскости (рис , 58,б). Полученная фигура и есть двугранный угол.



а)

Прямая *а* разделяет плоскость на две полуплоскости

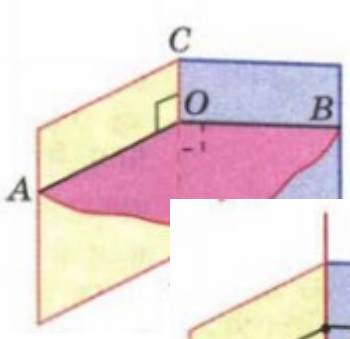


б)

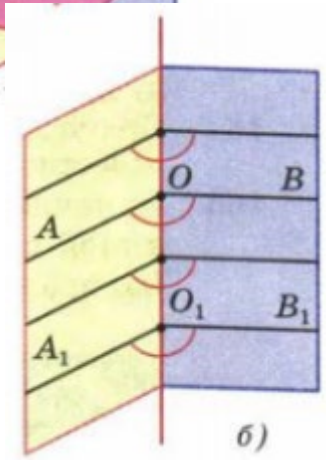
Таким образом, можно дать такое определение двугранного угла : двугранным углом называется фигура, образованная прямой **а** и двумя полуплоскостями с общей границей **а,** не принадлежащими одной плоскости. Полуплоскости, образующие двугранный угол, называются его гранями. У двугранного угла две грани, отсюда и название – двугранный угол. Прямая а – общая граница полуплоскостей – называется ребром двугранного угла.

Двугранный угол с ребром АВ, на разных гранях которого отмечены точки С и D, называют двугранным углом CABD.

В обыденной жизни мы часто встречаемся с предметами, имеющими форму двугранного угла. Такими предметами являются двускатные крыши зданий, полураскрытая папка, стена комнаты совместно с полом и т.д.



Мы знаем, что углы на плоскости (обычные углы) измеряются в градусах. А как измеряются двугранные углы? Это делается следующим образом. Отметим на ребре двугранного угла какую-нибудь точку и в каждой грани из этой лучи подведём луч перпендикулярно к ребру. Образованный этими лучами угол называется линейным углом двугранного угла. На рисунке 59, а угол АОВ – линейный угол двугранного угла с ребром CD. Так как ОА l CD и ОВ l CD, то плоскость АОВ перпендикулярна к прямой CD. Таким образом, плоскость линейного угла перпендикулярная к ребру двугранного угла. Очевидно, двугранный угол имеет бесконечные множество линейных углов (рис, 59,б).



б)

Докажем, что все линейные углы двугранного угла равны друг другу. Рассмотрим два линейных угла АОВ и $A_1O_1B_1$(См, рис , 59, Б) Лучи ОА и A_1O_1 лежат в одной грани и перпендикулярны к прямой OO_1 ,лежат в одной грани и перпендикулярны к прямой OO_1 поэтому они сонаправлены . Точно так же сонаправлены лучи ОВ и O_1B_1. Угол $A_1O_1B_1$ Угол АОВ (как углы с сонаправленными сторонами).

Градусной мерой двугранного угла называется градусная мера его линейного угла. На рисунке 60, а градусная мера двугранного угла равна 45°.

Обычно говорят коротко: «Двугранный угол равен 45°».

Двугранный угол называется прямым (острым, тупым), если он равен 90° (меньше 90°, больше 90°). Двугранный угол, изображенный на рисунке 60, б, прямой, на рисунке 60, а - острый, а на рисунке 60, в - тупой.

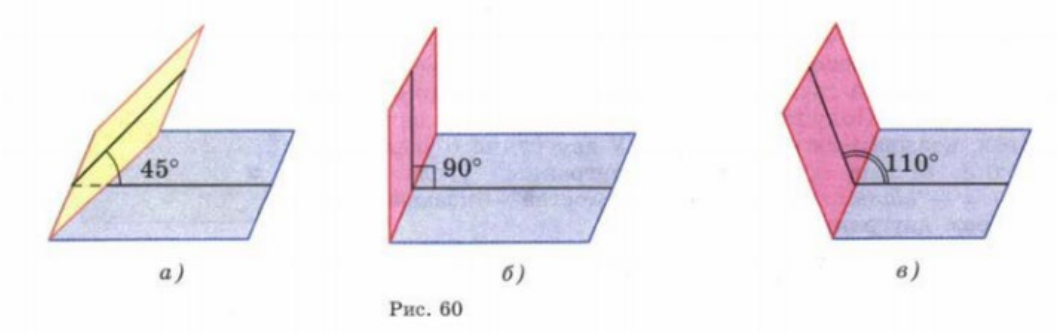


Рис. 60

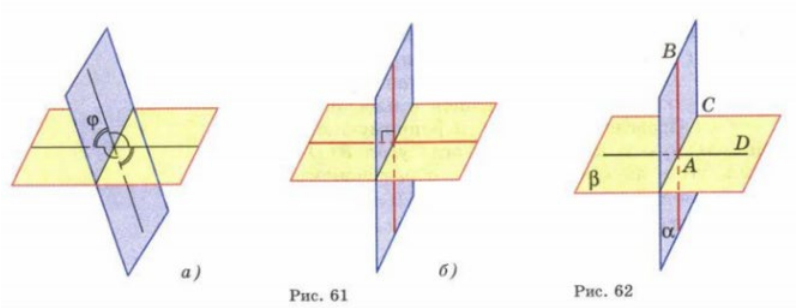


Рис. 61 Рис. 62

Признак перпендикулярности двух плоскостей

Две пересекающиеся плоскости образуют четыре двугранных угла с общим ребром (рис. 61, а).

Если один из этих двугранных углов равен F, то другие три угла равны соответственно 180° - F, F и 180° - F

В частности, если один из углов прямой ((р = 90°), то и остальные три угла прямые. Если F - тот из четырех углов, который не превосходит каждого из остальных, то говорят, что угол между пересекающимися плоскостями равен F Очевидно, О° < F < 90°.

Определение

Две пересекающиеся плоскости называются перпендикулярными (взаимно перпендикулярными), если угол между ними равен 90°

(рис . 61, б).

Примером взаимно перпендикулярных плоскостей служат плоскости стены и пола комнаты. Ясно, что все четыре двугранных угла, образованные взаимно перпендикулярными плоскостями, прямые.

Рассмотрим признак перпендикулярности двух плоскостей**.**

Теорема

Если одна из двух плоскостей проходит через прямую, перпендикулярную к другой плоскости, то такие плоскости перпендикулярны.

Доказательство

Рассмотрим плоскости а и В такие, что

плоскость а проходит через прямую АВ, перпендикулярную к плоскости В и пересекающуюся с ней в точке А (рис. 62)

Докажем, что а l В. Плоскости а и В пересекаются по некоторой прямой АС, причем АВ l АС,

так как по условию А.В l В, т. е. прямая А.В перпендикулярна к любой прямой, лежащей в плоскости В.

Проведем в плоскости В прямую АВ, перпендикулярную к прямой АС. Тогда угол BAD - линейный угол двугранного угла, образованного при пересечении плоскостей а и В.

Но Угол BAD = 90° (так как АВ $\perp$ В). Следовательно, угол между плоскостями а и В равен 90°, т. е. он а $\perp$ В. Теорема доказана.

Следствие

Плоскость, перпендикулярная к прямой, по которой пересекаются две данные плоскости, перпендикулярна к каждой из этих плоскостей (рис. 63).

Тема № 8 Многогранники. Понятие многогранника. Призма

Мы рассмотрели тетраэдр и параллелепипед: тетраэдр - поверхность, составленная из четырех треугольников (рис. 70, а), параллелепипед поверхность, составленная из шести параллелограммов (рис. 70, 6). Каждая из этих поверхностей ограничивает некоторое геометрическое тело, отделяет это тело остальной части пространства.

Поверхность, составленную из многоугольников и ограничивающую некоторое геометрическое тело, будем называть многогранной поверхностью или многогранником. Тетраэдр и параллелепипед - примеры многогранников. На рисунке 71 изображен еще один многогранник - октаэдр. Он составлен из восьми треугольников. Тело, ограниченное многогранником часто также называют многогранником.

Многоугольники, из которых составлен многогранник, называются его гранями. Гранями тетраэдра и октаэдра являются треугольники (рис. 70, а параллелепипед и 71), гранями параллелепипеда - параллелограммы(рис. 70, 6). Стороны граней называются ребрами, а концы ребер - вершинами многогранника. Отрезок, соединяющий две вершины, не принадлежащие одной грани, называется диагональю многогранника. Плоскость, по обе стороны от которой имеются точки многогранника, называется секущей плоскостью, общая часть многогранника и секущей плоскости – сечением многогранника.

Многогранники бывают выпуклые и невыпуклые. Многогранник называется выпуклым, если он расположен по одну сторону от плоскости каждой его октаэдр грани. Тетраэдр, параллелепипед и октаэдр – выпуклые многогранники. Ясно, что все грани выпуклого многогранника являются выпуклыми многоугольниками. Отметим также, что в выпуклом многограннике сумма всех плоских углов при каждой его вершине меньше 360°(см. п. 26). Рисунок 73 поясняет это утверждение: многогранник «разрезан» вдоль ребер и все его грани с общей вершиной А развернуты так, что оказались расположенными в одной плоскости ос. Видно, что сумма Не выпуклый много всех плоских углов при вершине А, т. е. меньше 360°.

Геометрическое тело

Мы отметили, что многогранник ограничивает некоторое геометрическое тело. Уточним понятие W геометрического тела. Точка М называется граничной точкой данной фигуры F, если среди сколь угодно близких к ней А точек (включая ее саму) есть точки, как принадлежащие фигуре, так и не принадлежащие ей. Множество всех граничных точек фигуры называется ее границей.

Так, например, границей шара является сфера. Точка фигуры, не являющаяся граничной, называется внутренней точкой фигуры. Каждая внутренняя точка фигуры характеризуется тем, что все достаточно близкие к ней точки пространства также принадлежат фигуре. Так, любая точка шара, не лежащая на сфере - его границе, является внутренней точкой шара.

Фигура называется ограниченной, если ее можно заключить в какую-нибудь сферу. Очевидно, шар, тетраэдр, параллелепипед - ограниченные фигуры, а прямая и плоскость - неограниченные.

Фигура называется связной, если любые две ее точки можно соединить непрерывной линией, целиком принадлежащей данной фигуре. Примерами связных фигур являются тетраэдр (см. рис. 70, а), параллелепипед (см. рис. 70, 6), октаэдр (см. рис. 71), плоскость. Фигура, состоящая из двух параллельных плоскостей, не является связной.

Геометрическим телом (или просто телом) называют ограниченную связную фигуру в пространстве, которая содержит все свои граничные точки, причем сколь угодно близко от любой граничной точки находятся внутренние точки фигуры. Границу тела называют также его поверхностью и говорят, что поверхность ограничивает тело.

Плоскость, по обе стороны от которой имеются точки данного тела, называется секущей плоскостью. Фигура, которая образуется при пересечении тела плоскостью (т. е. общая часть тела и секущей плоскости), называется сечением тела.

Теорема Эйлера

Сейчас мы докажем удивительную теорему, связанную с именем выдающегося математика Леонарда Эйлера (1707-1783), швейцарца по происхождению, большую часть жизни работавшего в России.

Теорема

В любом выпуклом многограннике сумма числа граней и числа вершин больше числа ребер на 2.

Доказательство

Рассмотрим произвольный выпуклый многогранник, имеющий в вершин, f граней и k ребер. h

Докажем, что f+ e - k = 2. O

Выберем произвольную грань G, отметим какую-нибудь точку M ее внутренней области и проведем из нее луч h, перпендикулярный к плоскости этой грани и лежащий по ту сторону от нее, по которую нет точек многогранника. Если плоскости каких-либо других граней пересекают луч h, то выберем на нем точку O, лежащую между M и ближайшей к M точкой пересечения; в противном случае возьмем в качестве точки O произвольную точку луча h (рис. 74). Тогда точка O окажется лежащей по ту же сторону от плоскости каждой грани многогранника, отличной от G, что и сам многогранник. Удалим теперь грань G. В результате получим многогранную поверхность F, имеющую те же ребра и вершины, что и исходный многогранник, число граней которой равно f - 1. Любой луч с началом 0 пересекает поверхность F не более чем в Одной точке (поскольку после пересечения лучом поверхности F он «уходит» в то полупространство, в котором точек поверхности F нет). Примем точку O за центр проектирования и рассмотрим центральную проекцию поверхности F на плоскость грани G

(рис. 75; грань G на этом рисунке изображена в увеличенном масштабе). Она представляет собой грань G, составленную из f - 1 выпуклых многоугольников - проекций остальных граней (докажите, что эти многоугольники - выпуклые).

Число вершин этих многоугольников равно e, а число сторон равно k. Если провести диагональ какого-нибудь из них, то число вершин не изменится, число многоугольников увеличится на 1, число сторон также увеличится на 1, поэтому разность числа многоугольников и числа сторон не изменится (см. рис. 75).

Призма

Рассмотрим два равных многоугольника, расположенных в параллельных плоскостях. Многоугольники соединяющие соответственные вершины многоугольников, параллельны (рис. 76). Каждый из n четырех оснований призмы является параллелограммом, так как имеет попарно параллельные противоположные стороны. Многогранник, составленный из двух равных многоугольников расположенных в параллельных плоскостях, и n параллелограммов, называется призмой (см. рис. 76).

Многоугольники называются основаниями, а параллелограммы - боковыми гранями призмы. Отрезки называются боковыми ребрами призмы. Эти ребра как противоположные стороны параллелограммов последовательно приложенных друг к другу, равны и параллельны. Перпендикуляр, проведенный из какой-нибудь точки одного основания к плоскости другого основания, называется высотой призмы. Если боковые ребра призмы перпендикулярны к основаниям, то призма называется прямой, в противном случае - наклонной. Высота прямой призмы равна ее боковому ребру. Прямая призма называется правильной, если ее основания - правильные многоугольники. У такой призмы все боковые грани - равные прямоугольники (объясните почему). На рисунке 77 изображена правильная шестиугольная призма.

Площадью полной поверхности призмы называется сумма площадей всех ее граней, площадью боковой поверхности призмы - сумма площадей ее боковых граней. Докажем теорему о площади боковой поверхности прямой призмы.

Теорема

Площадь боковой поверхности прямой призмы равна произведению периметра основания на высоту призмы.

Доказательство

Боковые грани прямой призмы - прямоугольники, основания которых - стороны основания призмы, а высоты равны высоте h призмы. Площадь боковой поверхности призмы равна сумме площадей указанных прямоугольников, т. е. равна сумме произведений сторон основания на высоту h. Вынося множитель h 3а скобки, получим в скобках сумму сторон основания призмы, т. е. его периметр P. Итак, Sбок,: = Ph. Теорема доказана.

Пространственная теорема Пифагора

Решим сначала такую задачу.

Задача

Найти площадь S1 прямоугольной проекции многоугольника с площадью S на плоскость а, если угол между плоскостью многоугольника и плоскостью а равен (ф (0° < (ф < 90°).

Решение

а) Начнем с того случая, когда данный многоугольник является треугольником, одна из сторон которого лежит в плоскости а, на котором сторона АВ треугольника АВС лежит в плоскости а, отрезок ССl - перпендикуляр, проведенный из точки С к плоскости а, и, следовательно, треугольник АВСl - проекция треугольника АВС на эту плоскость. Пусть отрезок С1Н - высота треугольника АВС,. Тогда отрезок СН - высота треугольника АВС (по теореме о трех перпендикулярах), а [СНС1 = (р (объясните почему). Так как 31-5АВ-Сдн, S-ЕАВ-СН, С1Н-СН-cosw, В

6) Если сторона АВ данного треугольника АВС параллельна плоскости а (рис. 78) рисунке треугольник А,В,С1 - проекция треугольника АВС, плоскость А302 параллельна плоскости а то, согласно доказанному, площадь треугольника равна S - cos (р. Но треугольник АВС2 равен треугольнику А,В,С1 (докажите это), поэтому его площадь равна Б,. Таким образом, и в этом случае площадь S1 проекции треугольника АВС с площадью S выражается формулой (2).

в) Рассмотрим, наконец, произвольный многоугольник с площадью S. Разобьем его на треугольники. Если ни одна из сторон какого-то из них не параллельна плоскости а и не лежит в ней, то разобьем этот треугольник на два треугольника отрезком, проведенным через одну из его вершин параллельно плоскости а , либо в самой плоскости. Выразим площадь проекции каждого треугольника по формуле (2) и сложим эти площади. Вынеся за скобки общий множитель cos ‹р, получим в скобках сумму площадей треугольников, т. е. площадь S данного многоугольника. Таким образом, площадь Sl проекции многоугольника выражается формулой (2). Воспользуемся этим для доказательства утверждения, получившего название пространственная теорема Пифагора.

Теорема

Если все плоские углы при одной из вершин тетраэдра - прямые, то квадрат площади грани, противолежащей этой вершине, равен сумме квадратов площадей остальных граней.

Задачи:

1) Докажите, что: а) у прямой призмы все боковые грани - прямоугольники; б) у правильной призмы все боковые грани – равные прямоугольники.

2) В прямоугольном параллелепипеде стороны основания равны 12 см и 5 СМ. Диагональ параллелепипеда образует с плоскостью основания угол в 45°. Найдите боковое ребро параллелепипеда.

3) Основанием прямого параллелепипеда является ромб с диагоналями 10 см и 24 см, а высота параллелепипеда равна 10 см. Найдите большую диагональ параллелепипеда.

Сечение параллелепипеда называется диагональным, если оно содержит какую-нибудь его диагональ и боковое ребро.

Перпендикулярным сечением наклонной призмы называется ее сечение плоскостью, перпендикулярной к боковым ребрам и пересекающей их.

Тема № 9 Правильные многогранники
Симметрия в пространстве

В планиметрии мы рассматривали фигуры, симметричные относительно точки и относительно прямой. В стереометрии рассматривают симметрию относительно точки, прямой и плоскости.

Точки A и A_1, называются **симметричными относительно точки *O* (центр симметрии)**, если *O* - середина отрезка AA_1, (рис. 84, *а*). Точка *O* считается симметричной самой себе.

Точки A и A_1, называются **симметричными относительно прямой *a* (ось симметрии)**, если прямая *a* проходит через середину отрезка AA_1 и перпендикулярна к этому отрезку (рис. 84, *б*). Каждая точка прямой *a* считается симметричной самой себе.

Точки A и A_1, называются **симметричными относительно плоскости ос (плоскость симметрии)**, если плоскость a проходит через середину отрезка AA_1, и перпендикулярна к этому отрезку (рис. 84, *в*). Каждая точка плоскости α: считается симметричной самой себе.

Введем понятия центра, оси, плоскости симметрии фигуры. **Точка (прямая, плоскость) называется центром (осью, плоскостью) симметрии фигуры, если каждая точка фигуры симметрична относительно нее некоторой точке той же фигуры**. Если фигура имеет центр (ось, плоскость симметрии), то говорят, что она обладает центральной (осевой, зеркальной) симметрией.

На рисунках 85, *а, б, в* показаны центр *O*, ось *a* и плоскость α симметрии прямоугольного параллелепипеда. Параллелепипед, не являющийся прямоугольным, но являющийся прямой призмой, имеет плоскость (или плоскости, если его основание - ромб), ось и центр симметрии.

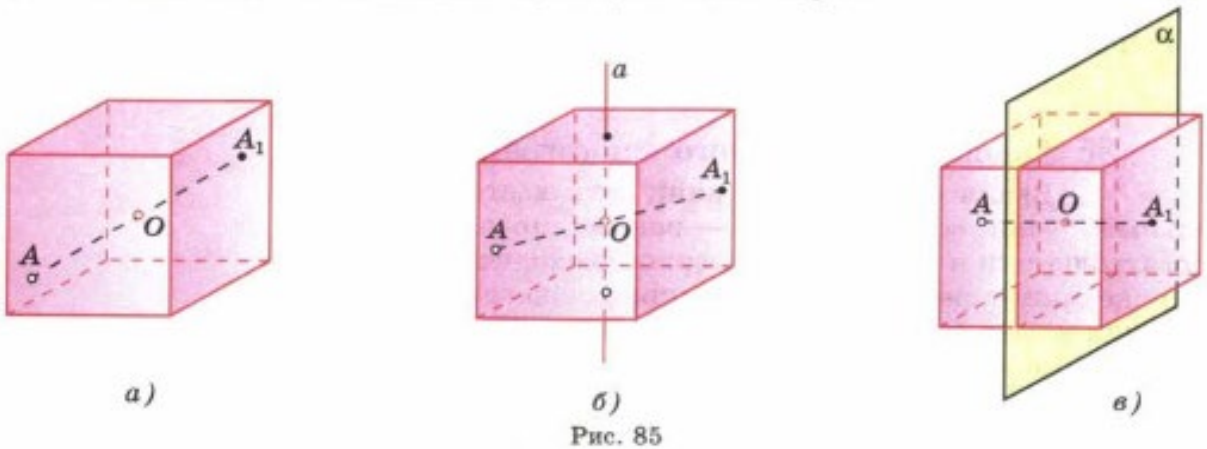


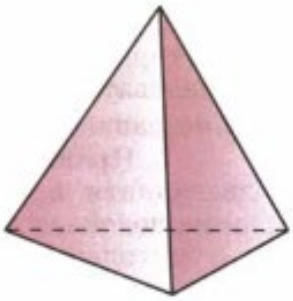
Рис. 85

Фигура может иметь один или несколько центров симметрии (осей, плоскостей симметрии). Например, куб имеет только один центр симметрии и несколько осей и плоскостей симметрии. Существуют фигуры, имеющие бесконечно много центров, осей или плоскостей симметрии. Простейшими из таких фигур являются прямая и плоскость. Любая точка плоскости является ее центром симметрии. Любая прямая (плоскость), перпендикулярная к данной плоскости, является ее осью (плоскостью) симметрии. С другой стороны,

существуют фигуры, не имеющие центров, осей или плоскостей симметрии. Например, параллелепипед, не являющийся прямой призмой, не имеет оси симметрии, но имеет центр симметрии и может иметь (подумайте, в каком случае) плоскость симметрии; призма и пирамида в общем случае не имеют ни плоскости, ни оси, ни центра симметрии (плоскость, ось или центр симметрии у этих многогранников могут быть лишь в некоторых частных случаях).

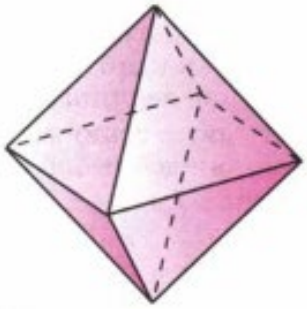
С симметрией мы часто встречаемся в природе, архитектуре, технике, быту. Так, многие здания симметричны относительно плоскости, например главное здание Московского государственного университета (рис. 86), некоторые виды деталей имеют ось симметрии. Почти все кристаллы, встречающиеся в природе, имеют центр, ось или плоскость симметрии (рис. 87). В геометрии центр, оси и плоскости симметрии многогранника называются **элементами симметрии** этого многогранника.

Понятие правильного многогранника



Правильный тетраэдр

Рис. 88



Правильный октаэдр

Рис. 89



Правильный икосаэдр

Рис. 90

Выпуклый многогранник называется **правильным**, если все его грани - равные правильные многоугольники и в каждой его вершине сходится одно и то же число ребер. Примером правильного многогранника является куб. Все его грани - равные квадраты, и к каждой вершине сходятся три ребра.

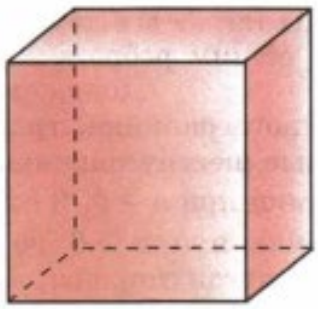
Очевидно, все ребра правильного многогранника равны друг другу. Можно доказать, что равны также все двугранные углы, содержащие две грани с общим ребром.

Докажем, что **не существует правильного многогранники, гранями которого являются правильные шестиугольники, семиугольники и вообще n-угольники при $n > 6$**. В самом деле, угол правильного n-угольника при $n > 6$ не меньше 120° (объясните почему). С другой стороны, при каждой вершине многогранники должно быть не менее трех плоских углов. Поэтому если бы существовал правильный многогранник, у которого грани - правильные n-угольники при $n > 6$, то сумма плоских углов при каждой вершине такого многогранника была бы не меньше чем 120° * 3 = 360°. Но это невозможно, так как сумма всех плоских углов при каждой вершине выпуклого многогранника меньше 360° (п. 27).

По этой же причине каждая вершина правильного многогранника может быть вершиной либо трех, четырех или пяти равносторонних треугольников, либо трех квадратов, либо трех правильных пятиугольников. Других возможностей нет.

В соответствии с этим получаем следующие правильные многогранники:

Правильный тетраэдр* (рис. 88) составлен из четырех равносторонних треугольников. Каждая его вершина является вершиной трех треугольников. Следовательно, сумма плоских углов при каждой вершине равна 180°.



Куб

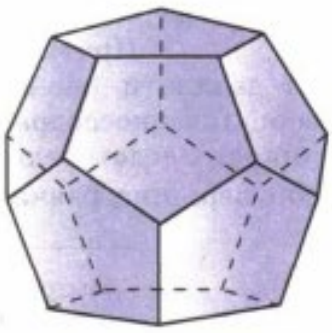
Рис. 91

Правильный октаэдр (рис. 89) составлен из восьми равносторонних треугольников. Каждая вершина октаэдра является вершиной четырех треугольников. Следовательно, сумма плоских углов при каждой вершине равна 24О°.

Правильный икосаэдр (рис. 90) составлен из двадцати равносторонних треугольников. Каждая вершина икосаэдра является вершиной пяти треугольников. Следовательно, сумма плоских углов при каждой вершине равна 300°.

Куб (рис. 91) составлен из шести квадратов. Каждая вершина куба является вершиной трех квадратов. Следовательно, сумма плоских углов при каждой вершине равна 27О°.

Правильный додекаэдр (рис. 92) составлен из двенадцати правильных пятиугольников. Каждая вершина додекаэдра является вершиной трех правильных пятиугольников. Следовательно, сумма плоских углов при каждой вершине равна 324°.



Правильный додекаэдр

Рис. 92

Других видов правильных многогранников, кроме перечисленных пяти, нет.

Замечания

1. Число граней *f*, ребер k и вершин *e* каждого из правильных многогранников можно найти с помощью теоремы Эйлера. В самом деле, пусть *n* – число ребер каждой грани, *m* - число ребер, сходящихся к каждой вершине. Поскольку каждое ребро принадлежит двум граням, то п/ = 219. Кроме того, *me* = 215: (так как каждое ребро содержит две вершины) и по теореме Эйлера *f* + *e* - *k* = 2. Из этих трех равенств находим:

Таким образом,

у правильного тетраэдра (*n* = 3, *m* = 3):

$$f \quad \frac{4m}{2m \;\; 2n \;\; mn}, \quad k \quad \frac{2mn}{2m \;\; 2n \;\; mn}, \quad e \quad \frac{4n}{2m \;\; 2n \;\; mn}.$$

$f = 4$, $k = 6$, $e = 4$;
у правильного октаэдра ($n = 3$, $m = 4$):
$f = 8$, $k = 12$, $e = 6$;
у правильного икосаэдра ($n = 3$, $m = 5$):
$f = 20$, $k = 30$, $e = 12$;
у куба ($n = 4$, $m = 3$): $f = 6$, $k = 12$, $e = 8$;
у правильного додекаэдра ($n = 5$, $m = 3$):
$f = 12$, k = 30, $e = 20$.

2. Мы доказали, что существует не более пяти видов правильных многогранников, но не доказали, что каждый из указанных многогранников действительно существует. Существование правильного тетраэдра правильной треугольной пирамиды со стороной основания, равной a, и высотой, равной $\frac{\sqrt{6}}{3}a$ и куба очевидно. Центры граней куба являются вершинами правильного октаэдра (докажите это), поэтому существование правильного октаэдра не вызывает сомнений. Правильный икосаэдр составлен из двух правильных пятиугольных пирамид и многогранника, отдаленно напоминающего пятиугольную призму. Высоты пирамид и этого многогранника легко выражаются через ребро a (как?), поэтому существование правильного икосаэдра также не вызывает сомнений. Наконец, центры граней правильного икосаэдра являются вершинами правильного додекаэдра (убедитесь в этом), поэтому правильный додекаэдр тоже существует.

Отметим, что в существовании всех пяти правильных многогранников можно убедиться воочию, если склеить их из разверток (задания 271-275)

.

Элементы симметрии правильных многогранников

Рассмотрим элементы симметрии правильных многогранников. **Правильный тетраэдр не имеет центра симметрии.** Прямая, проходящая через середины двух противоположных ребер, является его осью симметрии. Плоскость α, проходящая через ребро AB перпендикулярно к противоположному ребру AD правильного тетраэдра $ABCD$, является плоскостью симметрии (рис. 93). **Правильный тетраэдр имеет три оси симметрии и шесть плоскостей симметрии.**

Куб имеет один центр симметрии – точку пересечения его диагоналей. Прямые a и b, проходящие соответственно через центры противоположных граней и середины двух противоположных ребер, не принадлежащих одной грани, являются его осями симметрии (рис. 94). **Куб имеет девять осей симметрии.** Все оси симметрии проходят через центр симметрии. Плоскостью симметрии куба является плоскость, проходящая через любые две оси симметрии. **Куб имеет девять плоскостей симметрии.**

Правильный октаэдр, правильный икосаэдр и правильный додекаэдр имеют центр симметрии и несколько осей и плоскостей симметрии. Попробуйте подсчитать их число.



Рис. 97

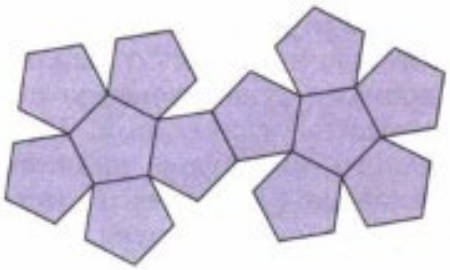


Рис. 98

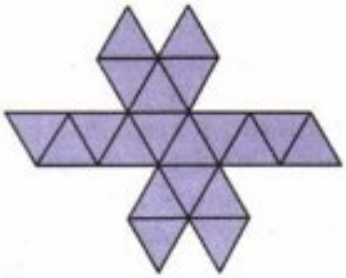


Рис. 99

Практические задания

1. Перерисуйте развертку правильного тетраэдра (рис. 95) на плотный лист бумаги в большем масштабе, вырежьте развертку (сделав необходимые припуски для склеивания) и склейте из нее тетраэдр.
2. Перерисуйте развертку куба (рис. 96) на плотный лист бумаги в большем масштабе, вырежьте развертку и склейте из нее куб.
3. Перерисуйте развертку правильного октаэдра (рис. 97) на плотный лист бумаги в большем масштабе, вырежьте развертку и склейте из нее октаэдр.
4. Перерисуйте развертку правильного додекаэдра (рис. 98) на плотный лист бумаги в большем масштабе, вырежьте развертку и склейте из нее додекаэдр.
5. Перерисуйте развертку правильного икосаэдра (рис. 99) на плотный лист бумаги в большем масштабе, вырежьте развертку и склейте из нее икосаэдр.

Вопросы и задачи

1. Сколько центров симметрии имеет: а) параллелепипед; б) правильная треугольная призма; в) двугранный угол; г) отрезок?
2. Сколько осей симметрии имеет: а) отрезок; б) правильный треугольник; в) куб?
3. Сколько плоскостей симметрии имеет: а) правильная четырехугольная призма, отличная от куба; б) правильная четырехугольная пирамида; в) правильная треугольная пирамида?

Тема № 10 Виды симметрий
Центральная симметрия

В курсе планиметрии мы познакомились с движениями плоскости, т. е. отображениями плоскости на себя, сохраняющими расстояния между точками. Введем теперь понятие движения пространства. Предварительно разъясним, что понимается под словами отображение пространства на себя. Допустим, что каждой точке М пространства поставлена в соответствие некоторая точка М, причем любая точка М, пространства оказалась поставленной в соответствие какой-то точке М. Тогда говорят, что задано отображение пространства на себя. Говорят также, что при данном отображении точка М переходит (отображается) в точку М. Под движением пространства понимается отображение пространства на себя, при котором любые две точки А и В переходят (отображаются) в какие-то точки А и В так, что А, В =АВ. Иными словами, движение пространства - это отображение пространства на себя, сохраняющее расстояния между точками. Примером движения может служить центральная симметрия - отображение пространства на себя, при котором любая точка М переходит в симметричную ей точку М, относительно данного центра 0.

Докажем, что центральная симметрия является движением. Обозначим буквой 0 центр симметрии и введем прямоугольную систему координат Оху с началом в точке О. Установим связь между координатами двух точек М (х; у; z) и М, (х,; у,; г,), симметричных относительно точки 0. Если точка М не совпадает с центром 0, то 0 - середина отрезка ММ. По формулам координат середины отрезка получаем $\frac{x+x}{2} = 0, \frac{y+y}{2} = 0, \frac{z+z}{2} = 0$, откуда х, = -х, у, = -у, z, = -z. Эти формулы верны и в том случае, когда точки М и О совпадают (объясните почему).

Рассмотрим теперь две точки А (х; у; z) и В (х2; у2; z2) и докажем, что расстояние между симметричными им точками А, и В, равно АВ. Точки А, и В, имеют координаты А (-х; -у; -z) и В (-х2; -у2; -z2). По формуле расстояния между двумя точками находим:

$AB = \sqrt{(-\text{x2} - x)^2 + (-y2 - y)^2 + (-z2 - z)^2}$. Из этих соотношений ясно, что АВ : А, В что и требовалось доказать.

Осевая симметрия

Осевой симметрией с осью а называется такое отображение пространства на себя, при котором любая точка М переходит в симметричную ей точку М, относительно оси а.

Докажем, что осевая симметрия является движением. Для этого введем прямоугольную систему координат Oxyz так, чтобы ось Oz совпала с осью симметрии, и установим связь между координатами двух точек М (х; у; z) и М, (х; у; z,), симметричных относительно оси Oz. Если точка М не лежит на оси

Oz, то ось Oz: 1) проходит через середину отрезка ММ, и 2) перпендикулярна к нему. Из первого условия по формулам для координат середины отрезка получаем $\frac{x+x}{2} = 0$ и $\frac{y+y}{2} = 0$, откуда x, =-x и y, =-y. Второе условие означает, что аппликаты точек М и М, равны: z, = z. Полученные формулы верны и в том случае, когда точка М лежит на оси Oz (объясните почему).

Рассмотрим теперь любые две точки A(x; y; z) и B (x2; y2; z2) и докажем, что расстояние между симметричными им точками A, и B, равно AB. Точки A и B имеют координаты A, (-x; -y; z,) и B, (-x2; -y; z2). По формуле расстояния между двумя точками находим: AB :$\sqrt{(y2-y)^2+(x2-x)^2}$. Из этих соотношений ясно, что AB =A1B1, что и требовалось доказать.

Зеркальная симметрия

Зеркальной симметрией (симметрией относительно плоскости a) называется такое отображение пространства на себя, при котором любая точка М переходит в симметричную ей относительно плоскости ос точку М.

Докажем, ЧТО зеркальная симметрия Является движением. для этого введем прямоугольную систему координат Oxyz так, чтобы плоскость Oxy совпала с плоскостью симметрии, и установим связь между координатами двух точек М (x; y; z) и М, (x; y; z,), симметричных относительно плоскости Oxy. Если точка М не лежит в плоскости Oxy, то эта плоскость: 1) проходит через середину отрезка ММ, и 2) перпендикулярна к нему. Из первого условия по формуле координат середины отрезка получаем -2 ‘ = O, откуда -z. Второе условие означает, что отрезок ММ, параллелен оси Oz, и, следовательно, x, = x, y, = y. Полученные формулы верны и в том случае, когда точка М лежит в плоскости Oxy (объясните почему).

Рассмотрим теперь две точки A (x; y; z)и B (x2; y2; z2) и докажем, что расстояние между симметричными им точками A, и B, равно AB. Точки A и B имеют координаты A, (x,; y,; -z,) и B, (x2; y2; -z2). По формуле расстояния между двумя точками находим: AB = $\sqrt{(-x2-x)^2+(-y2-y)^2+(-z2-z)^2}$. Из этих соотношений ясно, что AB = A1B1 что и требовалось доказать.

Параллельный перенос

Приведем еще один пример движения пространства. Возьмем какой-нибудь вектор fi. Параллельным переносом на вектор 5 называется отображение пространства на себя, при котором любая точка М переходит в такую точку М,, что ММ,

Докажем, что параллельный перенос является движением. При параллельном переносе на вектор любые две точки A и B переходят в точки A, и B, такие, что AA, = p и BB, = p. Требуется доказать, что A,B, = AB. По

правилу треугольника AB, = AA, + A, B1. С другой стороны, AB, : AB + BB, (рис. 141, 6). Из A, B, этих двух равенств получаем AA, + A, B, = AB + BB, или p + A, B, = AB + p, откуда A, B, = AB. Следовательно, A,B, =AB, что и требовалось доказать. Можно доказать (это делается так же, как и в планиметрии), что при любом движении отрезок переходит в отрезок, прямая - в прямую, плоскость в плоскость. Можно доказать также, что понятие наложения, с помощью которого в нашем курсе вводится равенство фигур (см. приложение 2), совпадает с понятием движения, т. е. любое наложение является движением и, обратно, любое движение является наложением. Это утверждение доказывается аналогично тому, как это делалось в планиметрии.

Преобразование подобия

Центральным подобием с центром O и коэффициентом k $ O называется отображение пространства на себя, при котором) sauna-51> точка M переходит в такую точку M,, что OM, = kOM. Нетрудно доказать, что если при центральном подобии с коэффициентом изомер! A и B переходят в точки A, и B,, то A,B, = kAB (см. приложение 1). Из этого, в частности, следует, что при центральном подобии треугольник переходит в подобный ему треугольник, плоскость, проходящая через точку O, переходит в себя, не проходящая через точку O - в параллельную ей плоскость, а сфера с центром C радиуса r(T. е. поверхность, состоящая из всех точек пространства, расположенных на расстоянии г от точки C) в сферу с центром C, радиуса kr, где 0-5, = 120-5. Докажите эти утверждения самостоятельно.

Центральное подобие является частным случаем так называемого преобразования подобия. Преобразованием подобия с коэффициентом k > O называется отображение плоскости на себя, при котором любые две точки A и B переходят в такие точки A, и B,, что A,B, = k -AB. Примерами преобразования подобия являются, очевидно, движение (при этом k = 1), центральное подобие, а также результат их последовательного выполнения.

Оказывается, верно и обратное утверждение: любое преобразование подобия представляет со бой результат последовательного выполнения движения u центрального подобия.

Докажем это. Рассмотрим преобразование подобия с коэффициентом k. Произвольные точки A и B переходят при нем в такие точки A, и B,, что A,B, : k-AB. Рассмотрим теперь центральное подобие с произвольным центром O и коэффициентом %. Точки A, и B, переходят при нем в такие точки A2 и B,,, что A282 = %. Тем самым в результате последовательного выполнения преобразования подобия и центрального подобия произвольные точки A и B переходят в такие точки A2 и B,,, что A232 = ”TAB" = AB. Это означает, что результатом последовательного выполнения указанных преобразований является движение. В свою очередь, в результате последовательного выполнения этого движения и центрального подобия с центром O и коэффициентом k точки A и B (взятые произвольно) переходят в те же точки

A] и B,, что и при исходном преобразовании подобия. Но это и означает, что исходное преобразование подобия является результатом последовательного выполнения указанного движения и центрального подобия с центром O и коэффициентом k. Утверждение доказано.

Преобразование подобия часто используется в геометрии. С его помощью, например, можно ввести понятие подобия произвольных тел: два тела называются подобными, если существует такое преобразование подобия, при котором одно из них переходит в другое.

Задачи

1. Найдите координаты точек, в которые переходят точки A (O; 1; 2), B (3; -1; 4), C (1; O; -2) при: а) центральной симметрии относительно начала координат; б) осевой симметрии относительно координатных осей; в) зеркальной симметрии относительно координатных плоскостей.

2. Докажите, что при центральной симметрии: а) прямая, не проходящая через центр симметрии, отображается на параллельную ей прямую; б) прямая, проходящая через центр симметрии, отображается на себя.

3. Докажите, что при центральной симметрии: а) плоскость, не проходящая через центр симметрии, отображается на параллельную ей плоскость; б) плоскость, проходящая через центр симметрии, отображается на себя.

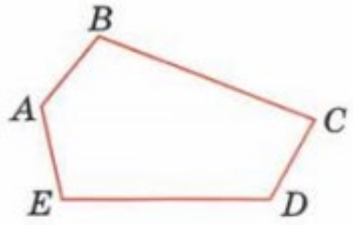
4. Докажите, что при осевой симметрии: а) прямая, параллельная оси, отображается на прямую, параллельную оси; б) прямая, образующая с осью угол ‹р, отображается на прямую, также образующую с осью угол р.

5. При зеркальной симметрии прямая а отображается на прямую а, Докажите, что прямые а и al лежат в одной плоскости.

Тема № 10 Тетраэдр и параллелепипед

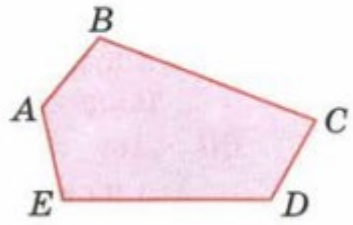
Тетраэдр

Одна из глав нашего курса будет посвящена В многогранникам — поверхностям геометрических тел, составленным из многоугольников. Но еще до подробного изучения многогранников мы познакомимся с двумя из них — **тетраэдром** и **параллелепипедом**. Это даст нам возможность проиллюстрировать понятия, связанные со взаимным расположением прямых и плоскостей, на примере двух важных геометрических тел.



а)

Многоугольник *ABCDE* — фигура, составленная из отрезков



б)

Многоугольник *ABCDE* — часть плоскости, ограниченная линией *ABCDE*

Рис. 33

Прежде чем ввести понятия тетраэдра и параллелепипеда, вспомним, что мы понимали под многоугольником в планиметрии. Многоугольник мы рассматривали либо как замкнутую линию без самопересечений, составленную из отрезков (рис. 33, а), либо как часть плоскости, ограниченную этой линией, включая ее саму (рис. 33, 6). При рассмотрении поверхностей и тел в пространстве будем пользоваться вторым толкованием многоугольника. При таком толковании любой многоугольник в пространстве представляет собой плоскую поверхность.

Перейдем теперь к определению тетраэдра.

Рассмотрим произвольный треугольник ABC и точку D, не лежащую в плоскости этого треугольника. Соединив точку D отрезками с вершинами треугольника ABC, получим треугольники DAB, BBC и DCA. Поверхность, составленная из четырех треугольников ABC, DAB, BBC и DCA, называется тетраэдром и обозначается так: BABC (рис. 34).

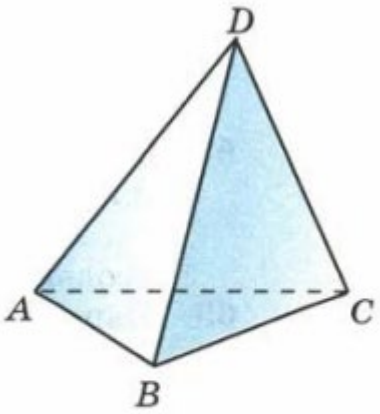


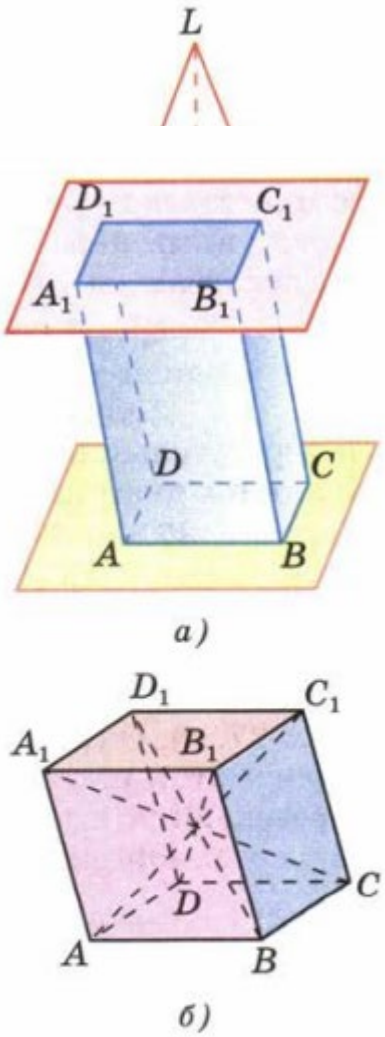
Рис. 34

Треугольники, из которых состоит тетраэдр, называются гранями, их стороны - ребрами, а вершины - вершинами тетраэдра. Тетраэдр имеет четыре грани, шесть ребер и четыре вершины. Два ребра тетраэдра, не имеющие общих вершин, называются противоположными. На рисунке 34 противоположными являются ребра AD и BC, BD и AC, CD и AB. Иногда выделяют одну из граней тетраэдра и называют ее основанием, а три другие - боковыми гранями.

Тетраэдр изображается обычно так, как показано на рисунках 34 и 35, Т. е. в виде выпуклого или невыпуклого четырехугольника с диагоналями. При этом штриховыми линиями изображаются невидимые ребра. На рисунке 34 невидимым является только ребро AC, & на рисунке 35 — ребра EK, KF и KL

Параллелепипед

Рассмотрим два равных параллелограмма ABCD и A,B,C,Б,, расположенных в параллельных плоскостях так, что отрезки AA,, BB,, CC, и DD1 параллельны (рис. 36, а). Четырехугольники ABB,A,, BCC,B,, СПБ,C,, DAA,Dl (1) также являются параллелограммами, так как каждый из них имеет попарно параллельные противоположные стороны, например, в четырехугольнике ABB,A1 стороны AA1 и BB, параллельны по условию, а стороны AB и АдВ1 — по свойству линий пересечения двух параллельных плоскостей третьей (свойство 10, п. 11). Поверхность, составленная из двух равных параллелограммов ABCD и A,B,C,Б1 и четырех параллелограммов (1), называется параллелепипедом и обозначается так: ABCBA,B,C,B. Параллелограммы, из которых составлен параллелепипед, называются гранями, их стороны — ребрами, а вершины параллелограммов — вершинами параллелепипеда. Параллелепипед имеет шесть граней, двенадцать ребер и восемь вершин. Две грани параллелепипеда, имеющие общее ребро, называются смежными, а не имеющие общих ребер — противоположными. На рисунке 36, 6 противоположными являются грани ABCD и A,B1C1B,, ABB,Al и BCC,BA1)B,A1 и BCC,B. Две вершины, не принадлежащие одной грани, называются противоположными. Отрезок, соединяющий противоположные вершины, называется диагональю параллелепипеда. Каждый параллелепипед имеет четыре диагонали. На рисунке 36, 6 диагоналями являются отрезки AC,, BB,, CA1 и ПБ,.



Параллелепипед

Рис. 36

Часто выделяют какие-нибудь две противоположные грани и называют их основаниями, а остальные грани — боковыми гранями параллелепипеда. Ребра параллелепипеда, не принадлежащие основаниям, называются боковыми ребрами. Так, если в качестве оснований выбрать грани ABCD и A1B,C,B,, то боковыми гранями будут параллелограммы (1), а боковыми ребрами — отрезки AA,, BB,, CC1 и ПБ,.

Параллелепипед изображается обычно так, как показано на рисунке 36, 6. При этом изображениями граней являются параллелограммы; невидимые ребра и другие невидимые отрезки, например диагонали, изображаются штриховыми линиями*.

Рассмотрим два свойства параллелепипеда.

1°. Противоположные грани параллелепипеда параллельны и равны.

Докажем, например, параллельность и равенство граней ABB,A, и DCC,D, параллелепипеда ABCDA,B,C,D, (рис. 37, а). Так как ABCD и ADD,A, — параллелограммы, то AB II DC и AA, II DD,. Таким образом, две пересекающиеся прямые AB и AA, одной грани соответственно параллельны двум пересекающимся прямым CD и DD, другой грани. Отсюда по признаку параллельности плоскостей следует, что грани ABB,A, и DCC,D, параллельны.

Докажем теперь равенство этих граней. Так как все грани параллелепипеда — параллелограммы, то AB = DC и AA, : DD,. По этой же причине стороны углов A,AB и D,DC соответственно сонаправлены, и, значит, эти углы равны. Таким образом, две смежные стороны и угол между ними параллелограмма ABB,A, соответственно равны двум смежным сторонам и углу между ними параллелограмма DCC,D,, поэтому эти параллелограммы равны.

2°. Диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и делятся этой точкой пополам.

Чтобы доказать это свойство, рассмотрим четырехугольник A,D,CB, диагонали которою A,C и D,B являются диагоналями параллелепипеда ABCDA,B,C,D, (см. рис. 37, а). Так как A,D, H BC и A,D, = BC (объясните почему), то A,B,CB — параллелограмм. Поэтому диагонали A,C и D,B пересекаются в некоторой точке 0 и этой точкой делятся пополам.

Далее рассмотрим четырехугольник AD,C,B (рис. 37, б. Он также является параллелограммом (докажите это), и, следовательно, его диагонали AC, и D,B пересекаются и точкой пересечения делятся пополам. Но серединой диагонали D,B является точка 0. Таким образом, диагонали AlC, DIB и ACl пересекаются в точке O и делятся этой точкой пополам.

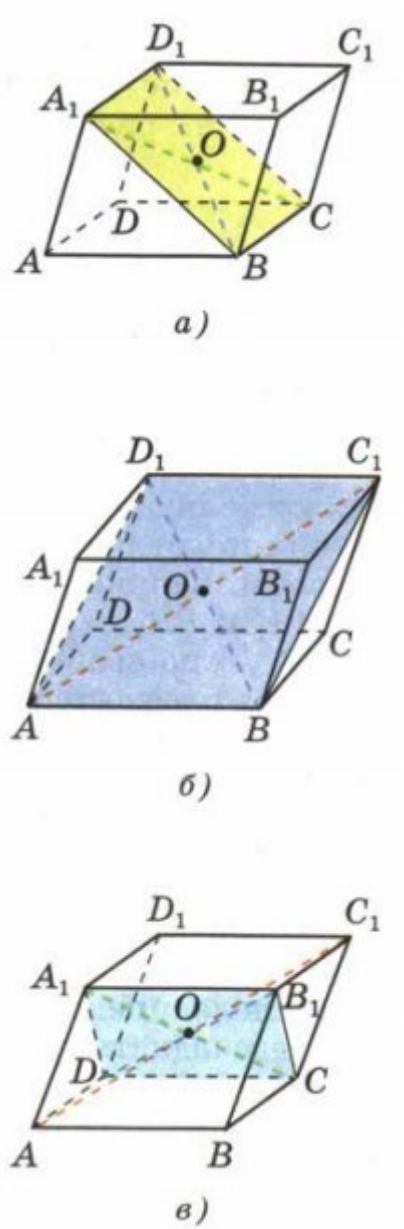


Рис. 37

Наконец, рассматривая четырехугольник A,B,CB (рис. 37, в), точно так же устанавливаем, что и четвертая диагональ DBl параллелепипеда проходит через точку O и делится ею пополам.

Вопросы для самоподготовки:

Вариант 1

1. Верно ли утверждение: если две прямые не имеют общих точек, то они параллельны?

2. Точка M не лежит на прямой a. Сколько прямых, не пересекающих прямую a, проходит через точку M?

3. Прямые a и c параллельны, а прямые a и b пересекаются. Могут ли прямые b и c быть параллельными?

4. Прямая a параллельна плоскости α. Верно ли, что эта прямая не пересекает ни одну прямую, лежащую в плоскости α?

5. Прямая a пересекает плоскость α. Лежит ли в плоскости α хоть одна прямая, параллельная a?

Вариант 2

1. Верно ли утверждение: если две прямые параллельны некоторой плоскости, то они параллельны друг другу?

2. Точка M не лежит на прямой a. Сколько из этих прямых параллельны прямой a?

3. Прямая a параллельна плоскости α. Верно ли, что эта прямая параллельна любой прямой, лежащей в плоскости α?

4. Две прямые параллельны некоторой плоскости. Могут ли эти прямые пересекаться?

5. Могут ли скрещивающиеся прямые a и b быть параллельными прямой c?

Тема № 11 Задачи на построение сечений

Для решения многих геометрических задач, связанных с тетраэдром и параллелепипедом, полезно уметь строить на рисунке их сечения различными плоскостями. Уточним, что понимается под сечением тетраэдра или параллелепипеда. Назовем секущей плоскостью тетраэдра (параллелепипеда) любую плоскость, по обе стороны от которой имеются точки данного тетраэдра (параллелепипеда). Секущая плоскость пересекает грани тетраэдра (параллелепипеда) по отрезкам. Многоугольник, сторонами которого являются эти отрезки, называется сечением тетраэдра (параллелепипеда). Так как тетраэдр имеет четыре грани, то его сечениями могут быть только треугольники и четырехугольники (рис. 38). Параллелепипед имеет шесть граней. Его сечениями могут быть треугольники, четырехугольники (рис. 39, а), пятиугольники (рис. 39, 6) и шестиугольники (рис. 39, в).

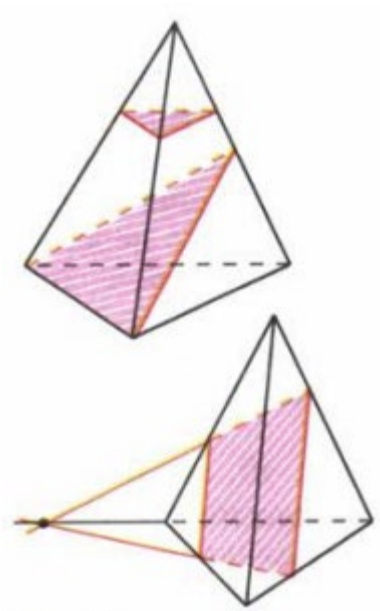


Рис. 38

При построении сечений параллелепипеда на рисунке следует учитывать тот факт, что если секущая плоскость пересекает две противоположные грани по каким-то отрезкам, то эти отрезки параллельны (свойство 1°, п. 11). Так, на рисунке 39, б секущая плоскость пересекает две противоположные грани (левую и правую) по отрезкам AB и CD, а две другие противоположные грани (переднюю и заднюю) - по отрезкам AE и BC, поэтому AB II CD и AE ll BC. По той же причине на рисунке 39, в AB H ED, AF Il CD, BC II EF. Отметим также, что для построения сечения достаточно построить точки пересечения секущей плоскости с ребрами тетраэдра (параллелепипеда), после чего остается провести отрезки, соединяющие каждые две построенные точки, лежащие в одной и той же грани.

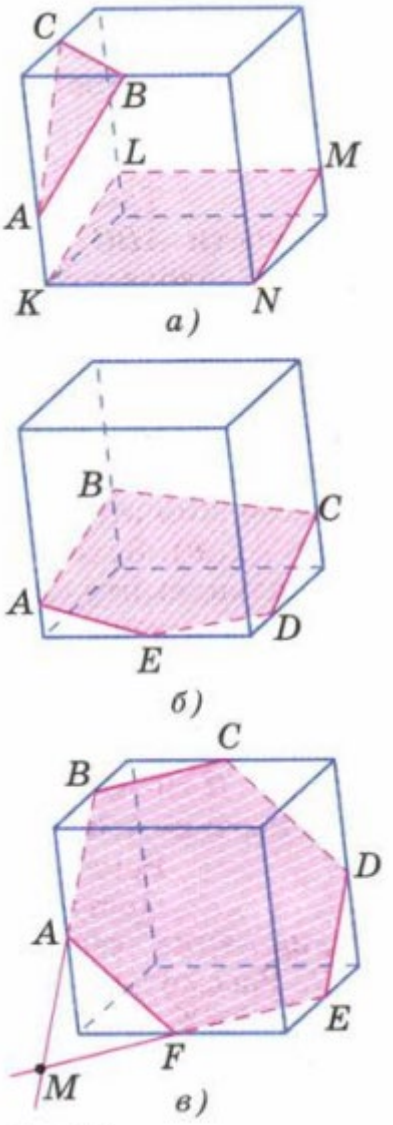


Рис. 39

Рассмотрим примеры построения различных сечений тетраэдра и параллелепипеда.

Задача 1

На ребрах AB, BD и CD тетраэдра ABCD отмечены точки M, N и P (рис. 40, а). Построить сечение тетраэдра плоскостью MNP.

Решение

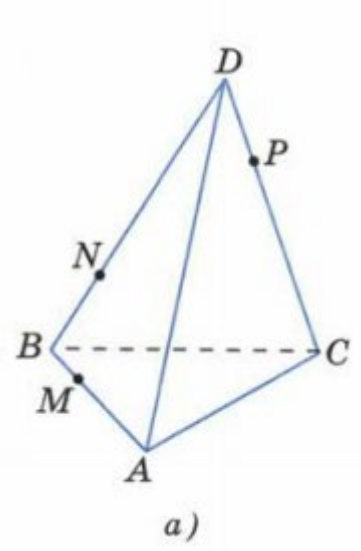
Построим сначала прямую, по которой плоскость M NP пересекается с плоскостью грани ABC. Точка M является общей точкой этих плоскостей. Для построения еще одной общей точки продолжим отрезки NP и BC до их пересечения в точке E (рис. 40, 6), которая и будет

второй общей точкой плоскостей MNP и ABC. Следовательно, эти плоскости пересекаются по прямой ME. Прямая ME пересекает ребро AC в некоторой точке Q. Четырехугольник MNPQ - искомое сечение.

Если прямые NP и BC параллельны (рис. 40, в), то прямая NP параллельна грани ABC, поэтому плоскость MNP пересекает эту грань по прямой ME', параллельной прямой NP. Точка Q, как и в первом случае, есть точка пересечения ребра AC с прямой ME'.

Задача 2

На ребрах параллелепипеда даны три точки A, B и C. Построить сечение параллелепипеда плоскостью ABC.

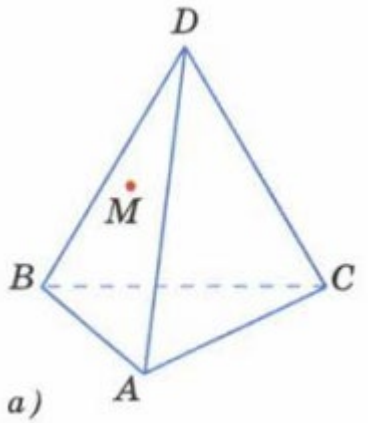


а)

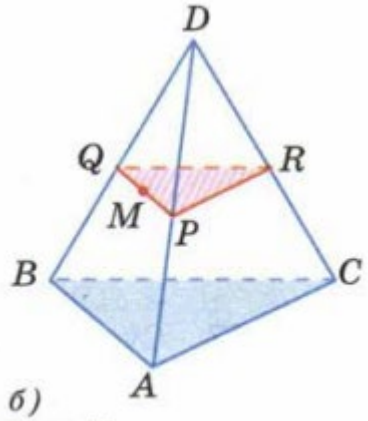
Решение

Построение искомого сечения зависит от того, на каких ребрах параллелепипеда лежат точки A, B и C. Рассмотрим некоторые частные случаи. Если точки A, B и C лежат на ребрах, выходящих из одной вершины (см. рис. 39, а), нужно провести отрезки AB, BC и CA, и получится искомое сечение - треугольник ABC. Если точки A, B и C расположены так, как показано на рисунке 39, 6, то сначала нужно провести отрезки AB и BC, а затем через точку A провести прямую, параллельную BC, а через точку C - прямую, параллельную AB. Пересечения этих прямых с ребрами нижней грани дают точки E и D. Остается провести отрезок ED, и искомое сечение – пятиугольник ABCDE - построено.

Более трудный случай, когда данные точки A, B и C расположены так, как показано на рисунке 39, в. В этом случае можно поступить так. Сначала построим прямую, по которой секущая плоскость пересекается с плоскостью нижнего основания. Для этого проведем прямую AB и продолжим нижнее ребро, лежащее в той же грани, что и прямая AB, до пересечения с этой прямой в точке M. Далее через точку M проведем прямую, параллельную прямой BC. Это и есть прямая, по которой секущая плоскость пересекается с плоскостью нижнего основания. Эта прямая пересекается с ребрами нижнего основания в точках E и F. Затем через точку E проведем прямую, параллельную прямой AB, и получим точку D. Наконец, проводим отрезки AF и CD, и искомое сечение шестиугольник ABCDEF - построено.



а)



б)

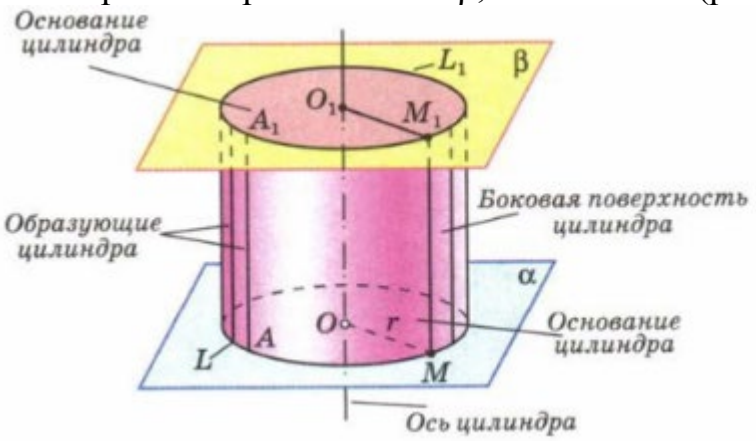
Рис. 41

Тема 12 Цилиндр

Понятие цилиндра

Рассмотрим произвольную плоскость α и окружность L с центром O радиуса r, лежащую в этой плоскости. Через каждую точку окружности L проведем прямую, перпендикулярную к плоскости α. Поверхность, образованная этими прямыми, называется **цилиндрической поверхностью**, а сами прямые – **образующими цилиндрической поверхности**. Прямая, проходящая через точку O перпендикулярно к плоскости α, называется осью цилиндрической поверхности. Поскольку все образующие и ось перпендикулярны к плоскости α, то они параллельны друг другу.

Рассмотрим теперь плоскость β, плоскости α (рис. 142).



Цилиндр

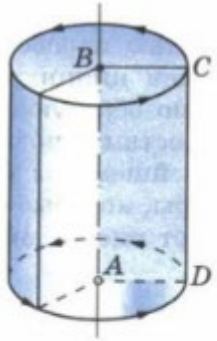
Рис. 142

Отрезки образующих, заключенные между плоскостями α и β, параллельны и равны друг другу. По построению концы этих отрезков, расположенные в плоскости α, заполняют окружность L. Концы же, расположенные в плоскости β, заполняют окружность L_1 с центром O_1 радиуса r, где O_1 – точка пересечения плоскости β с осью цилиндрической поверхности. Справедливость этого утверждения следует из того, что множество концов образующих, лежащих в плоскости β, получается из окружности L параллельным переносом на вектор OO_1. Параллельный перенос является движением и, значит, наложением, а при наложении любая фигура переходит в равную ей фигуру. Следовательно, при параллельном переносе на вектор OO_1, окружность L перейдет в равную ей окружность L_1 радиуса r с центром в точке O_1.

Тело, ограниченное цилиндрической поверхностью и двумя кругами с границами L и L_1, называется цилиндром (см. рис. 142). Круги называются **основаниями цилиндра**, отрезки образующих, заключенные между основаниями, - **образующими цилиндра**, а образованная ими часть цилиндрической поверхности – **боковой поверхностью цилиндра**. Ось цилиндрической поверхности называется **осью цилиндра**.

Как уже отмечалось, все образующие цилиндра параллельны и равны друг другу. Длина образующей называется **высотой цилиндра**, а радиус основания – **радиусом цилиндра**.

Цилиндр может быть получен вращением прямоугольника вокруг одной из его сторон. На рисунке 143

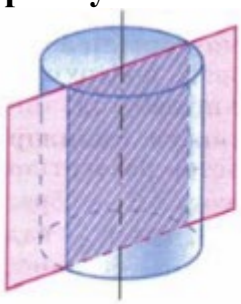


Цилиндр получен вращением прямоугольника *ABCD* вокруг стороны *AB*

Рис. 143

изображен цилиндр, полученный вращением прямоугольника ABCD вокруг стороны AB. При этом боковая поверхность цилиндра образуется вращением стороны CD, а основания – вращением сторон BC и AD.

Рассмотрим сечения цилиндра различными плоскостями. Если секущая плоскость проходит через ось цилиндра, то сечение представляет собой **прямоугольник** (рис. 144),

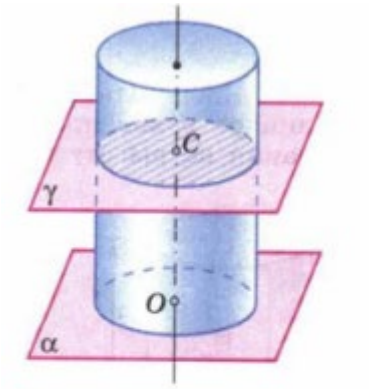


Осевое сечение цилиндра

Рис. 144

Две стороны которого – образующие, а две другие – диаметры оснований цилиндра. Такое сечение называется **осевым**.

Если секущая плоскость перпендикулярна к оси цилиндра, то сечение является **кругом**.



Сечение цилиндра плоскостью, перпендикулярной к оси

Рис. 145

Площадь поверхности цилиндра

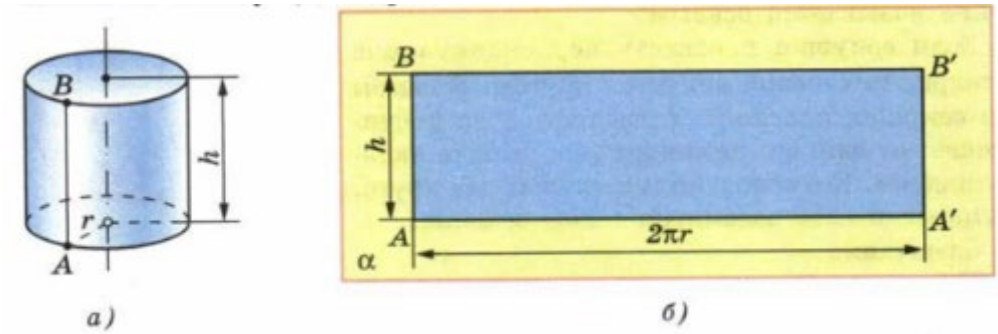


Рис. 147

На рисунке 147, а) изображен цилиндр. Представим себе, что его боковую поверхность разрезали по образующей AB и развернули таким образом, что все образующие оказались расположенными в некоторой плоскости α (рис. 147, б). В результате в плоскости α получится прямоугольник ABB’A’. Стороны AB и A’B’ прямоугольника представляют собой два края разреза боковой поверхности цилиндра по образующей AB. Этот прямоугольник называется **разверткой боковой поверхности цилиндра**. Основание AA’ прямоугольника является разверткой окружности основания цилиндра, а высота AB – образующей цилиндра, поэтому AA’ = 2πr, AB = h, где r – радиус цилиндра, h – его высота.

За площадь боковой поверхности цилиндра принимается площадь ее развертки.

Так как площадь прямоугольника ABB’A’ равна AA’ * AB = 2πrh, то для вычисления площади $S_{бок}$ боковой поверхности цилиндра радиуса r и высоты h получается формула $S_{бок} = 2\pi rh$.

Итак, **площадь боковой поверхности цилиндра равна произведению длины окружности основания на высоту цилиндра**.

Площадью полной поверхности цилиндра называется сумма площадей боковой поверхности и двух оснований. Так как площадь каждого основания

равна πr^2, то для вычисления площади $S_{цил}$ полной поверхности цилиндра получаем формулу $S_{цил} = 2\pi r(r+h)$.

Тема 13 Метод координат в пространстве. Движения

Координаты точки и координаты вектора

Прямоугольная система координат в пространстве

Если через точку пространства проведены три попарно перпендикулярные прямые, на каждой из них выбрано направление (оно обозначается стрелкой) н выбрана единица измерения отрезков, то говорят, что задана **прямоугольная система координат** в пространстве (рис. 121). Прямые с выбранными на них направлениями называются **осями координат**, а их общая точка - **началом координат**. Она обозначается обычно буквой О. Оси координат обозначаются так: Ox, Oy, Oz - и имеют названия: ось абсцисс, ось ординат, ось аппликат. Вся система координат обозначается Oxyz. Плоскости, проходящие соответственно через оси координат Ox и Oy, Oy и Oz, Oz и Ox, называются **координатными плоскостями** и обозначаются Oxy, Oyz, Ozx.



Рис. 121

Точка О разделяет каждую из осей координат на два луча. Луч, направление которого совпадает с направлением осы, называется положительной полуосью, а другой луч - отрицательной полуосью.

В прямоугольной системе координат каждой точке М пространства сопоставляется тройка чисел, которые называется ее координатами. Они определяются аналогично координатам точек на плоскости. Проведем через точку М три плоскости, перпендикулярные к осям координат, и обозначим через М1, М2 и М3 точки пересечения этих плоскостей соответственно с осями абсцисс, ординаты аппликат (рис. 122). Первая координата точки М (она называется абсциссой и обозначается обычно буквой x) определяется так: x = OM1 если M1 - точка положительной полуоси: x =-OM1 если M1 - точка отрицательной полуоси; x = 0, если M1 совпадает с точкой О. Аналогично с помощью точки М2 определяется вторая координата (ордината) y точки М, а с помощью точки М, третья координата (аппликата) z точки М. Координаты точки М записываются в скобках после обозначения точки: М (x; y; z), причем первой указывают абсциссу, второй - ординату, третьей - аппликату. На рисунке 123 изображены шесть точек A (9; 5; 10), B (4; -3; 6), C (9; 0; 0), D) (4; 0; 5), E (0; 3; 0), F (0; 0; -3).

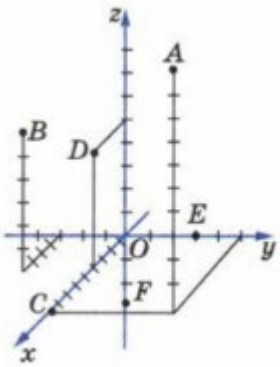


Рис. 123

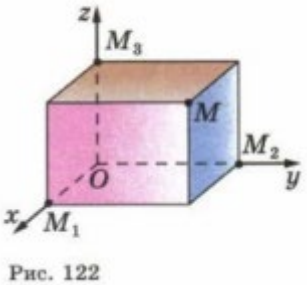


Рис. 122

Если точка М (x; y; z) лежит на координатной плоскости или на оси координат, то некоторые ее координаты равны нулю. Так, если М:= Oxyz аппликата точки М равна нулю: г = 0. Аналогично если М е Oxz. то y = 0, а если М:= Oyz, то x = 0. Если М:= Ox, то ордината и аппликата точки М равны нулю: y= 0 и z= 0 (например, у точки С на рисунке 123). Если М:= Oy, то x = 0

и z = 0; если M:= Oz, то x = 0 и y = O. Все три координаты начала координат равны нулю: O (0; 0; 0).

Координаты вектора

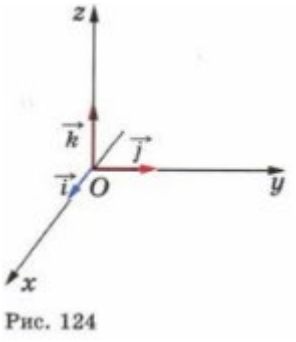


Рис. 124

Зададим в пространстве прямоугольную систему координат Oxyz. На каждой из положительных полуосей отложим от начала координат **единичный вектор**, т. е. вектор, длина которого равно единице. Обозначим через Г единичный вектор оси абсцисс, через j - единичный вектор оси ординат и через k - единичный вектор оси аппликат (рис. 124). Векторы i, j, k назовем **координатными векторами**. Очевидно, эти векторы не компланарны. Поэтому **любой вектора можно разложить по координатным векторам. т. е. представить в виде**

a = xi+ yj+ zk,

причем коэффициенты разложения x, y, г определяются единственным образом.

Коэффициенты x, y и z в разложении вектора a по координатным векторам называются координатами вектора a в данной системе координат. Координаты вектора a будем записывать в фигурных скобках после обозначения вектора: a {x; y, z}. На рисунке 125 изображен прямоугольный параллелепипед, имеющий следующие измерения: OA1 = 2, OA2 = 2, 0A3 = 4. Координаты векторов, изображенных на этом рисунке, таковы: a (2: 2; 4}, b (2; 2; -1), A3 A {2; 2; 0}, j (1; 0; 0), j {o; 1; o}, k {o; o; 1}.

Так как нулевой вектор можно представить в виде 0 = Oi+Oj+0k', то все координаты нулевого вектора равны нулю. Далее, **координаты равных векторов соответственно равны,** т. е. если векторы a (x1; y1; z1) и b (x2; y2 г2) равны, то x1 = x2 y1 = y2 и z1 = z2 (объясните почему).

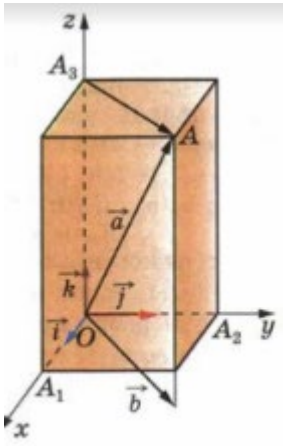


Рис. 125

Рассмотрим правила, которые позволяют по координатам данных векторов найти координаты их суммы и разности, а также координаты произведения данного вектора на данное число.

1°. Каждая координата суммы двух или более векторов равна сумме соответствующих координат этих векторов. Другими словами, если a (x1 y1 г1) и b (x2; y2; z2) — данные векторы, то вектора a + b имеет координаты (x1, + x2; y1 + y2; z1 - z2).

2°. Каждая координата разности двух векторов равна разности соответствующих координат этих векторов. Другими словами, если a {x1; y1; z1) и b (x2; y2; z2) — данные векторы, то вектор a - b имеет координаты {x1 - x2; y1 - y2; z1 - z2}.

3°. Каждая координата произведения вектора на число равна произведению соответствующей координаты вектора на это число. Другими словами, если a (x; y; z) — данный вектор, a — данное число, то вектор aa имеет координаты (ax; ay; az).

Утверждения 1°-3° доказывается точно так же, как и для векторов на плоскости.

Рассмотренные правила позволяют находить координаты любого вектора, представленного в виде алгебраической суммы данных векторов, координаты которых известны.

Связь между координатами векторов ы координатами точек Вектор, конец которого совпадает с данной точкой, а начало - с началом координат, называется радиус-вектором данной точки. Докажем, что координаты любой точки равны соответствующим координатам ее радиус-вектора. Обозначим координаты данной точки М через (х; у; г). Пусть М, Мк, М - точки пересечения с осями координат плоскостей, проходящих через точку М перпендикулярно к этим осям

Тема 14 Компланарные векторы

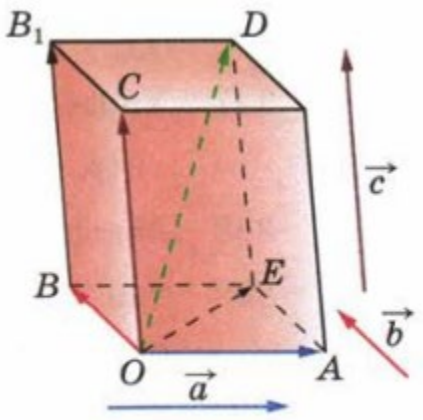


Рис. 114

Векторы называются компланарными, если при откладывании их от одной и той же точки они будут лежать в одной плоскости. Другими словами, векторы называются компланарными, если имеются равные им векторы, лежащие в одной плоскости.

Ясно, что любые два вектора компланарны; три вектора, среди которых имеются два коллинеарных, также компланарны, а три произвольных вектора могут быть как компланарными, так и не компланарными. На рисунке 114 изображен параллелепипед. Векторы $\overrightarrow{BB_1}$, $\overrightarrow{OD}$ и $\overrightarrow{OE}$ компланарны, так как если отложить от точки 0 вектор, равный $\overrightarrow{BB_1}$ то получится вектор $\overrightarrow{OC}$, а векторы $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD}$ и $\overrightarrow{OE}$ лежат в одной плоскости OCE. Векторы $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}$ не компланарны, так как вектор $\overrightarrow{OC}$ не лежит в плоскости OAB. Рассмотрим признак компланарности трех векторов.

Если вектор $\vec{c}$ можно разложить по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, т. е. представить в виде

$$\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}, \qquad (1)$$

где x и y - некоторые числа, то векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны.

Докажем этот признак. Будем считать, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны (если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, то компланарность векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ очевидна). Отложим от произвольной точки О векторы $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ (рис. 115). Векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ лежат в плоскости OAB. Очевидно, в этой же плоскости лежат векторы $\overrightarrow{OA}_1$: x * $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}_1$ = y * $\overrightarrow{OB}$, а следовательно, и их сумма - вектор $\overrightarrow{OC}$ = x * $\overrightarrow{OA}$ + y * $\overrightarrow{OB}$, равный вектору $\vec{c}$. Итак, векторы $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ и $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ лежат в одной плоскости, т. е. векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны.

Справедливо и обратное утверждение: если векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны, а векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не компланарны, то вектор $\vec{c}$ можно разложить по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (т. е. представить в виде (1)), **причем коэффициенты разложения** (т. е. числа x, y В формуле (1)) **определяются единственным образом.** Пользуясь теоремой о разложении вектора по двум неколлинеарным векторам, известной из курса планиметрии, докажите это утверждение самостоятельно.

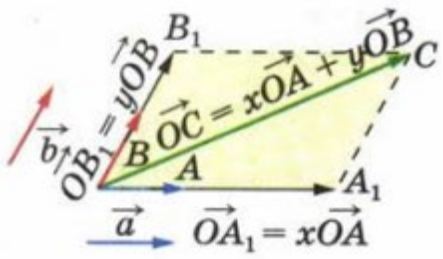


Рис. 115

Правило параллелепипеда

Для сложения трех некомпланарных векторов можно пользоваться так называемым правилом параллелепипеда. Опишем его. Пусть $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ - некомпланарные векторы. Отложим от произвольной точки О пространства векторы $\vec{OA}=\vec{a}$, $\vec{OB}=\vec{b}$, $\vec{OC}=\vec{c}$ и построим параллелепипед так, чтобы отрезки ОА, ОВ и ОС были его ребрами (см. рис. 114). Тогда диагональ OD этого параллелепипеда изображает сумму векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$: $\vec{OD}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$. Действительно, $\vec{OD}=\vec{OE}+\vec{ED}=(\vec{OA}+\vec{AE})+\vec{ED}=\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$.

Разложение вектора по трем некомнланарным векторам

Если вектор $\vec{p}$ представлен в виде

$$\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}, \qquad (2)$$

где x, y и z - некоторые числа, то говорят, что **вектор $\vec{p}$ разложен по векторам $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$**. Числа x, y, z называются **коэффициентами разложения**.

Докажем теорему о разложении вектора по трем некомпланарным векторам.

Теорема

Любой вектор можно разложить по трем данным некомпланарным векторам, причем коэффициенты разложения определяются единственным образом.

Доказательство

Пусть $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ - данные некомпланарные векторы. Докажем сначала, что любой вектор $\vec{p}$ можно представить в виде (2).

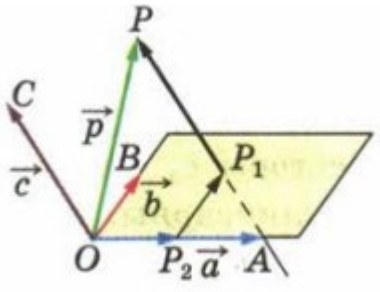


Рис. 116

Отметим произвольную точку O и отложим от этой точки векторы (рис. 116):

$$\overrightarrow{OA} = \vec{a},\ \overrightarrow{OB} = \vec{b},\ \overrightarrow{OC} = \vec{c},\ \overrightarrow{OP} = \vec{p}. \qquad (3)$$

Через точку $\vec{p}$ проведем прямую, параллельную прямой OC, и обозначим через P_1 точку пересечения этой прямой с плоскостью AOB (если P ∈ OC, то в качестве точки P_1 возьмем точку 0). Затем через точку P_1 проведем прямую, параллельную прямой OB, и обозначим через P_2 точку пересечения этой прямой с прямой OA (если P_1 ∈ OB, то в качестве точки P_2 возьмем точку 0). По правилу многоугольника

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_2} + \overrightarrow{P_2P_1} + \overrightarrow{P_1P}. \qquad (4)$$

Векторы $\overrightarrow{OP_2}$ и $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{P_2P_1}$ и $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{P_1P}$ и $\overrightarrow{OC}$ компланарны, поэтому существуют числа x, y, z такие, что $\overrightarrow{OP_2} = x \cdot \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{P_2P_1} = y \cdot \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{P_1P} = z \cdot \overrightarrow{OC}.$

Подставив эти выражения в равенство (4), получим:

$$\overrightarrow{OP} = x \cdot \overrightarrow{OA} + y \cdot \overrightarrow{OB} + z \cdot \overrightarrow{OC}.$$

Отсюда, учитывая равенства (3), приходим к равенству (2).

Докажем теперь, что коэффициенты разложения в формуле (2) определяются единственным образом. Допустим, что наряду с разложением (2) имеется другое разложение вектора $\vec{p}$: $\vec{p} = x_1\vec{a} + y_1\vec{b} + z_1\vec{c}.$

Вычитая это равенство из равенства (2) и используя свойства действий над векторами, получаем:

$$\vec{0} = (x - x_1)\,\vec{a} + (y - y_1)\,\vec{b} + (z - z_1)\,\vec{c}.$$

Тогда из этого равенства находим: $\vec{c} = -\frac{x-x_1}{z-z_1}\vec{a} - \frac{y-y_1}{z-z_1}\vec{b},$ Откуда следует, что векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ компланарны. Но это противоречит условию теоремы. Значит, наше предположение неверно, Следовательно, коэффициенты разложения определяются единственным образом. Теорема доказана.

Тема 15 Скалярное произведение векторов

1. Угол между векторами.

Возьмем два произвольных вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Отложим от какой-нибудь точки О векторы $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$. Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не являются сонаправленными, то лучи ОА и ОВ образуют угол АОВ (рис. 1).

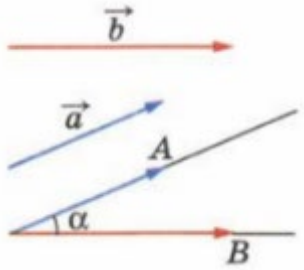


Рис.1

Градусную меру этого угла обозначим буквой α и будем говорить, что **угол между векторами** $\vec{a}$ **и** $\vec{b}$ **равен** α. Если же векторы $\vec{a}$ **и** $\vec{b}$ сонаправлены, в частности один из них или оба нулевые, то будем считать, что угол между ними равен 0°. Если угол между векторами равен 90°, то векторы называются перпендикулярными. Угол между векторами $\vec{a}$ **и** $\vec{b}$ обозначается так: $\widehat{\vec{a}\ \vec{b}}$.

На рисунке 2 изображено несколько векторов. Углы между ними таковы: $\widehat{\vec{a}\ \vec{b}} = 30°$, $\widehat{\vec{a}\ \vec{c}} = 120°$, $\widehat{\vec{a}\ \vec{d}} = 60°$, $\widehat{\vec{b}\ \vec{c}} = 90°$, $\widehat{\vec{d}\ \vec{f}} = 0°$, $\widehat{\vec{d}\ \vec{c}} = 180°$. На этом рисунке $\vec{b} \perp \vec{c}$, $\vec{b} \perp \vec{d}$, $\vec{b} \perp \vec{f}$.

2. Скалярное произведение векторов

Скалярным произведением двух векторов называется произведение их длин на косинус угла между ними. Скалярное произведение векторов $\vec{a}$ **и** $\vec{b}$ обозначается так: $\vec{a}\,\vec{b}$. Таким образом,

$$\vec{a}\,\vec{b} = |\vec{a}| * |\vec{b}| \cos\left(\widehat{\vec{a}\ \vec{b}}\right).$$

Как и в планиметрии, справедливы следующие утверждения:

скалярное произведение ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда эти векторы перпендикулярны;

скалярный квадрат вектора (т. е. скалярное произведение вектора на себя) равен квадрату его длины.

Докажите эти утверждения самостоятельно.

Скалярное произведение двух векторов можно вычислить, зная координаты этих векторов: **скалярное произведение векторов** $\vec{a}$ $\{x_1; y_1; z_1\}$ и $\vec{b}$ $\{x_2; y_2; z_2\}$ **выражается формулой** $\vec{a}\,\vec{b} = x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$**.** Это утверждение доказывается точно так же, как в планиметрии.

Косинус угла а между ненулевыми векторами $\vec{a}$ $\{x_1; y_1; z_1\}$ и $\vec{b}$ $\{x_2; y_2; z_2\}$ вычисляется по формуле

$$\cos\alpha = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} * \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}} \qquad (1)$$

В самом деле, так как

$\vec{a}\,\vec{b}=|\vec{a}|*|\vec{b}|\cos\alpha$,

то

$$\cos\alpha=\frac{\vec{a}\,\vec{b}}{|\vec{a}|*|\vec{b}|}.$$

Подставив сюда выражения для $\vec{a}\vec{b}$, $|\vec{a}|$ и $|\vec{b}|$ через координаты векторов $\vec{a}$ **и** $\vec{b}$, получим формулу (1).

Сформулируем основные свойства скалярного произведения векторов.

Для любых векторов $\vec{a}$**,** $\vec{b}$**,** $\vec{c}$ **и любого числа k справедливы соотношения:**

1°. $\vec{a}^2\geq 0$**, причем** $\vec{a}^2>0$ **при** $\vec{a}\neq\vec{0}$**.**

2°. $\vec{a}\vec{b}=\vec{b}\vec{a}$ **(переместительный закон).**

3°. $(\vec{a}+\vec{b})\vec{c}=\vec{a}\,\vec{c}+\vec{b}\,\vec{c}$ **(распределительный закон).**

4°. $k(\vec{a}\,\vec{b})=(k\vec{a})\vec{b}$ **(сочетательный закон).**

Утверждения 1°-4° доказываются точно так же, как в планиметрии.

Нетрудно доказать, что распределительный закон имеет место для любого числа слагаемых. Например, $(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\,\vec{d}=\vec{a}\vec{d}+\vec{b}\vec{d}+\vec{c}\vec{d}$.

Список использованных источников

Основные источники:

1. Башмаков М.И. Математика: учебник для студ. учреждений сред. проф. образования/ М.И. Башмаков.-5-е изд., стер.-М.: Издательский центр «Академия», 2018.-256 с.

2. Башмаков М.И. Математика: Сборник задач профильной направленности: учебное пособие для студ. учреждений сред. проф. образования/ М.И. Башмаков.-2-е изд., стер.-М.: Издательский центр «Академия», 2018.- 208 с.

Дополнительные источники:

1. Письменный Д.Т., Шевченко Ю.А. «Сборник задач по высшей математике»/Учебник/ - М.: Айрис Пресс, 2007 г, 198 с.

2. Валуцэ И. И. Математика для техникумов./Учебник/ - М, Наука, 2005 г., 303 с.

3. Никифорова И. А., О. Н. Самсонюк. Варианты конкурсных задач по математике - БГУЭП, 2006 г., 157 с.

4. Дорофеев Г. В., Г. К.Муравин. Сборник заданий по математике: Дрофа, 2005 г.

5. Выготский Я.Я. Справочник по элементарной математике. М.: Наука, 2009, 424с.

6. Сивашинский И.Х. Неравенства в задачах. М.: Наука, 2008, 301с.

7. Мордкович А.Г. События. Вероятности. Статистическая обработка данных: Доп. параграфы к курсу алгебры [Текст] - М.: Наука, 2009, 124с.

Интернет источники:

1. Графики функций [Электронный ресурс] – режим доступа http://graphfunk.narod.ru - свободный (Дата обращения: 11.01.2016).

2. Математика в Открытом колледже [Электронный ресурс] – режим доступа http://www.mathematics.ru свободный (Дата обращения: 14.02.2016 г.)

3. Математика: уроки, тесты, презентации, конспекты [Электронный ресурс] / Электронные данные. – режим доступа: https://kopilkaurokov.ru/matematika свободный (Дата обращения: 01.02.2016 г.)